BEZPIECZNE NASTAWY DLA TYPOWYCH OBIEKTÓW

Obiekty i regulatory. Obiekty bez opóźnień. Obiekty z opóźnieniem. Przykład I – obiekt „prosty". Odpowiedź na zakłócenie. Przykład II – obiekt „trudny". Poradnik Inżyniera – Automatyka.

OBIEKTY I REGULATORY

1. Obiekty w automatyzacji

Typowymi transmitancjami opisującymi lub aproksymującymi dynamikę obiektów w automatyzacji procesów technologicznych, takich jak zbiorniki, piece, reaktory chemiczne, kotły, turbiny, generatory itd., są:

$$\frac{k_o}{Ts+1},\quad \frac{1}{T_c s},\quad \frac{k_o}{(Ts+1)^2},\quad \frac{1}{T_C s(Ts+1)},\quad e^{-\tau s},\quad \frac{k_o}{Ts+1}e^{-\tau s},\quad \frac{k_o}{(Ts+1)^2}e^{-\tau s},\quad \frac{1}{T_c s}e^{-\tau s}$$

2. Regulatory I, PI, PID

Składowa całkująca I algorytmu regulacji eliminuje błąd ustalony po wystąpieniu stałego, utrzymującego się zakłócenia.

- PI: $k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$

  PID: $k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_d s}{\frac{T_d}{D}s+1}\right) \underset{D>1}{\cong} k_p(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s)$, typowo D = 5…8

- I: jako PI dla $k_{p,\min}<1$

  $$k_{p,\min}\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)=k_{p,\min}+\frac{k_{p,\min}}{T_i s} \underset{małe\,T_i}{\cong} \frac{k_{p,\min}}{T_i s}=\frac{k_i}{s},\qquad k_i=\frac{k_{p,\min}}{T_i}$$

- Typowe T_d w PID:

  $$\boxed{T_d=\frac{T_i}{4}}$$

  Ziegler i Nichols, 1943
  „różniczkowanie = ćwiartka całkowania"

Wtedy

PID: $k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_i}{4}s\right)=k_p\frac{\left(\frac{T_i}{2}s+1\right)^2}{T_i s}$

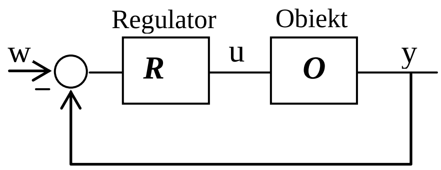
- Bezpieczne nastawy

  Są to nastawy regulatora PID/PI/I, które dla typowej transmitancji wiernie odpowiadającej obiektowi zapewniają przebiegi aperiodyczne krytyczne, a dla transmitancji w miarę dobrze aproksymującej obiekt przebiegi z niewielkim przeregulowaniem lub niedoregulowaniem.

  Prostym sposobem doboru czasu całkowania T_i jest eliminacja stałej czasowej obiektu (lub dwóch stałych czasowych).

  W układach II rzędu przebiegi aperiodyczne krytyczne otrzymuje się wówczas, gdy mianownik transmitancji układu zamkniętego ma $\Delta=0$.

- Układ



OBIEKTY BEZ OPÓŹNIEŃ

1. Inercja

- O: $\frac{k_o}{Ts+1}$, R: PI $\rightarrow$ $k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$

$$G_{otw}=k_p(1+\frac{1}{T_i s})\frac{k_o}{Ts+1}=k_p k_o\frac{T_i s+1}{T_i s}\cdot\frac{1}{Ts+1}$$

<u>$T_i=T$</u> – eliminacja stałej czasowej

$$G_{otw}=\frac{k_p k_o}{T}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{T_{zam}s}, \qquad T_{zam}=\frac{T}{k_p k_o}$$

$$G_{zam}=\frac{G_{otw}}{1+G_{otw}}=\frac{1}{T_{zam}s+1}$$

- Dane t_r – czas regulacji

$$t_r=4T_{zam}=4\frac{T}{k_p k_o} \qquad \rightarrow \qquad \underline{k_p=\frac{4T}{t_r k_o}}$$

Wniosek. Im krótszy czas regulacji t_r, tym większe wzmocnienie regulatora k_p.

2. Integrator

- O: $\frac{1}{T_c s}$, R: PI

$$G_{otw} = k_p(1+\frac{1}{T_i s})\frac{1}{T_c s} = \frac{k_p}{T_i T_c}\frac{T_i s+1}{s^2} = k\frac{T_i s+1}{s^2}, \qquad k = \frac{k_p}{T_i T_c}$$

$$G_{zam} = \frac{G_{otw}}{1+G_{otw}} = \frac{k(T_i s+1)}{s^2+kT_i s+k}$$

$$\Delta = 0: \quad k^2 T_i^2 - 4k = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{4}{T_i^2}$$

Pierwiastek (biegun): $s_{1,2} = -\frac{kT_i}{2} = -\frac{2}{T_i}$ dla Δ=0

Stała czasowa jest odwrotnością modułu pierwiastka.

$$t_r = \frac{4}{|s_{1,2}|} = 2T_i$$

- Dane t_r

$$\underline{T_i = \frac{t_r}{2}}, \quad k = \frac{k_p}{T_i T_c} = \frac{4}{T_i^2} \quad \rightarrow \quad k_p = 4\frac{T_c}{T_i} = \underline{8\frac{T_c}{t_r}}$$

Uwaga. Ze względu na $T_i s$ w liczniku G_{zam} odpowiedź skokowa będzie mieć przeregulowanie. Można je zlikwidować rozdzielając regulator PI na I+P lub podając wielkość zadaną *w* na filtr o stałej czasowej T_i.

3. Podwójna inercja

- O: $\frac{k_o}{(Ts+1)^2}$, R: PID $\longrightarrow$ $k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right) \underset{\underline{T_d=\frac{T_i}{4}}}{=} k_p\frac{(\frac{T_i}{2}s+1)^2}{T_i s}$

$$\frac{T_i}{2} = T \text{ – eliminacja podwójnej stałej czasowej,} \qquad \underline{T_i = 2T}$$

$$G_{otw} = k_p\frac{(\frac{T_i}{2}s+1)^2}{T_i s}\cdot\frac{k_o}{(Ts+1)^2} \underset{T_i=2T}{=} \frac{k_p k_o}{2T}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{T_{zam}s}, \qquad T_{zam} = \frac{2T}{k_p k_o}$$

$$G_{zam} = \frac{1}{T_{zam}s+1}$$

- Dane t_r

$$t_r = 4T_{zam} = 4\frac{2T}{k_p k_o} \qquad \rightarrow \qquad \underline{k_p = \frac{8T}{t_r k_o}}$$

OBIEKTY Z OPÓŹNIENIEM

1. „Czyste” opóźnienie

- Przykład – taśmociąg

  O: $k_o e^{-\tau s}$ R: I $\rightarrow \frac{k_i}{s}$ (np. $\frac{k_{p,\min}}{T_i s}$)

  Aproksymacja Padé I rzędu

$$e^{-\tau s} \cong \frac{-\frac{\tau}{2}s+1}{\frac{\tau}{2}s+1}$$

- $G_{otw} = \frac{k_i}{s} k_o e^{-\tau s} = k_i k_o \frac{e^{-\tau s}}{s} \cong k\frac{-\frac{\tau}{2}s+1}{s(\frac{\tau}{2}s+1)}, \qquad k = k_i k_o$

$$G_{zam} = \frac{G_{otw}}{1+G_{otw}} = \frac{k(-\frac{\tau}{2}s+1)}{\frac{\tau}{2}s^2 + (1-k\frac{\tau}{2})s + k}$$

$$\Delta = 0 \rightarrow (1-k\frac{\tau}{2})^2 - 4k\frac{\tau}{2} = \underbrace{k^2\frac{\tau^2}{4} - 3k\tau + 1}_{\Delta=9\tau^2-4\frac{\tau^2}{4}=8\tau^2, \quad \sqrt{\Delta}=2\sqrt{2}\tau} = 0 \qquad \text{– równanie dla } k$$

$$k = \frac{3\tau - 2\sqrt{2}\tau}{2\frac{\tau^2}{4}} = 2(3-2\sqrt{2})\frac{1}{\tau} \cong 0.34\frac{1}{\tau}, \qquad \underline{k_i = 0.34\frac{1}{k_o\tau}}$$

Wyjaśnienie. Drugie rozwiązanie, tj. $k = 2(3+2\sqrt{2})\frac{1}{\tau}$, zmienia znak drugiego współczynnika w mianowniku G_{zam} na ujemny, co powoduje, że układ zamknięty byłby niestabilny.

Ze wzoru $k_i = 0.34/(k_o\tau)$ widać, że im większe opóźnienie τ, tym słabsze działanie regulacyjne

$$s_{1,2} = -\frac{1-k\frac{\tau}{2}}{2\frac{\tau}{2}} = -2(\sqrt{2}-1)\frac{1}{\tau}, \qquad t_r = \frac{4}{|s_{1,2}|} = \frac{2}{\sqrt{2}-1}\tau \cong 4.83\tau \underline{\cong 5\tau}$$

Wniosek. Czasu regulacji t_r krótszego niż 5τ nie da się osiągnąć stosując regulację PID.

2. Inercja z opóźnieniem

- O: $\frac{k_o}{Ts+1}e^{-\tau s}$ R: PI

  $\underline{T_i = T}$ – eliminacja stałej czasowej

$$G_{otw} = k_p \frac{T_i s+1}{T_i s}\frac{k_o}{Ts+1}e^{-\tau s} \underset{T_i=T}{=} \frac{k_p k_o}{T}\cdot\frac{e^{-\tau s}}{s} \cong k\frac{-\frac{\tau}{2}s+1}{s(\frac{\tau}{2}s+1)}, \qquad k = \frac{k_p k_o}{T} \quad \text{– Padé I}$$

Ponieważ G_{otw} ma postać jak wyżej, zatem $k = 0.34\frac{1}{\tau}$, $t_r \cong 5\tau$.

$\underline{k_p = 0.34\frac{1}{k_o}\frac{T}{\tau}}$, np. $k_o = 1$, $\frac{T}{\tau} = 10 \to k_p = 3.4$

3. Podwójna inercja z opóźnieniem

- O: $\frac{k_o}{(Ts+1)^2}e^{-\tau s}$, R: PID $\to$ $k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right) \underset{\underline{T_d=\frac{T_i}{4}}}{=} k_p\frac{(\frac{T_i}{2}s+1)^2}{T_i s}$

  $\underline{T_i = 2T}$ – eliminacja stałych czasowych

$$G_{otw} = k_p\frac{(\frac{T_i}{2}s+1)^2}{T_i s}\frac{k_o}{(Ts+1)^2}e^{-\tau s} \underset{T_i=2T}{=} \frac{k_p k_o}{2T}\cdot\frac{e^{-\tau s}}{s} \cong k\frac{-\frac{\tau}{2}s+1}{s(\frac{\tau}{2}s+1)}, \qquad k = \frac{k_p k_o}{2T}$$

- Jak poprzednio: $k = 0.34/\tau$, $t_r = 5\tau$

  Zatem

  $k_p = 0.68\frac{1}{k_o}\frac{T}{\tau} \cong \underline{0.7\frac{1}{k_o}\frac{T}{\tau}}$

PRZYKŁAD I – OBIEKT „PROSTY”

1. Obiekt

- Obiekt „prawdziwy” i aproksymacja (zob. wykład *Identyfikacja*)

$$\frac{1}{(s+1)(0.1s+1)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{s+1}e^{-0.17s}$$

$T = 1, \qquad \tau = 0.17, \qquad k_o = 1$

W obiektach „prostych” opóźnienie τ jest wyraźnie mniejsze od stałej czasowej T.

2. Regulator PI

- Nastawy

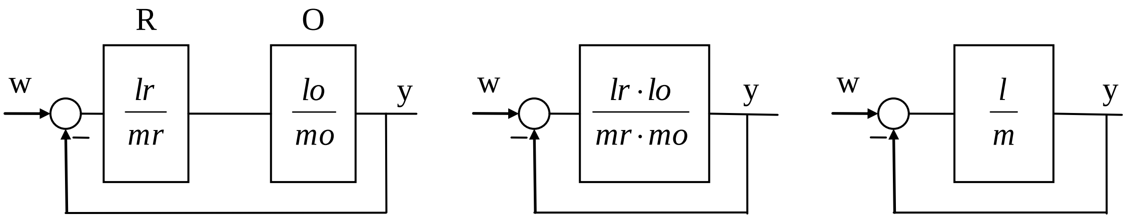
  $T_i = T = 1, \qquad k_p = 0.34\frac{1}{k_o}\frac{T}{\tau} = 0.34\frac{1}{0.18} = 1.88 \cong 1.9$

  PI: $1.9\frac{s+1}{s}$

- Czas regulacji – $t_r = 5\tau = 5 \cdot 0.18 \cong 1$

3. Matlab

- Odpowiedź na wielkość zadaną



l=lr ·lo, m=mr·mo conv( )

- lr=1.9*[1 1]; mr=[1 0];

  lo=1; mo=conv([1 1], conv([0.1 1], [0.1 1])); – obiekt “prawdziwy”

  lo=[0 0 0 lo]; – długość jak mo

  l=conv(lo, lr); m=conv(mo, mr);

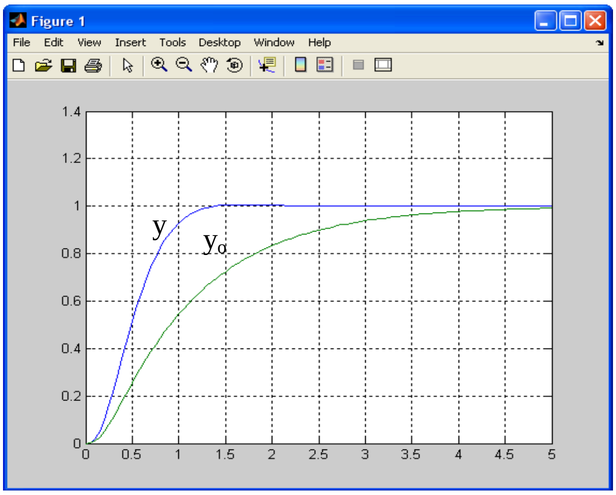
  t=0:0.05:5;

  y=step(l, l+m, t); – układ zamknięty

  yo=step(lo, mo, t); – obiekt

  plot(t, y, t, yo), grid

  max(y)



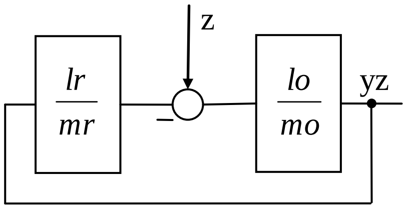
$p\% \cong 0.7\%$

Wniosek. Układ zamknięty szybko nadąża za wielkością zadaną.

ODPOWIEDŹ NA ZAKŁÓCENIE

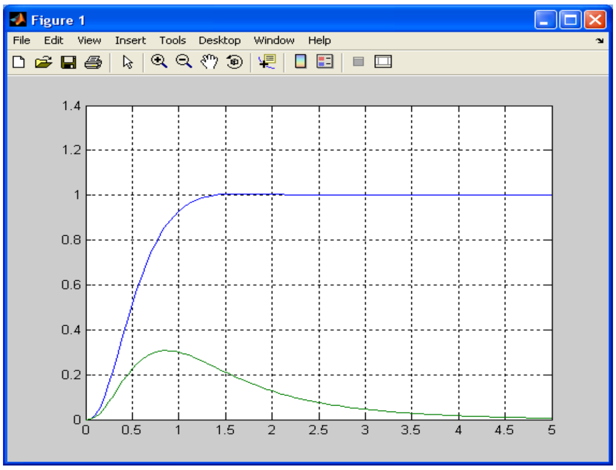
1. Transmitancja zakłóceniowa

- Układ



$$G_z = \frac{\frac{lo}{mo}}{1+\frac{lr}{mr}\cdot\frac{lo}{mo}} = \frac{lo\cdot mr}{\underbrace{mr\cdot mo + lr\cdot lo}_{l+m}}$$

2. Matlab

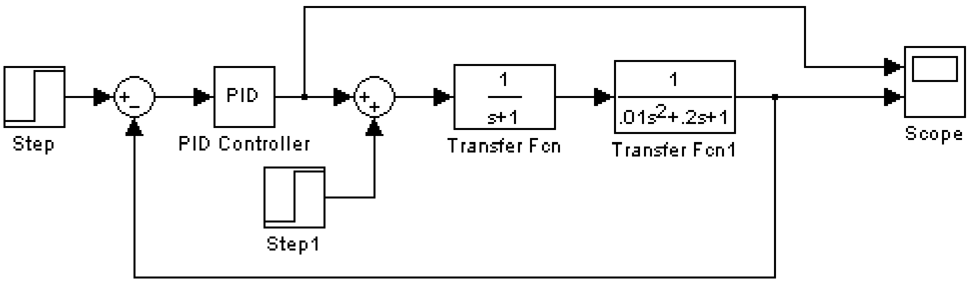


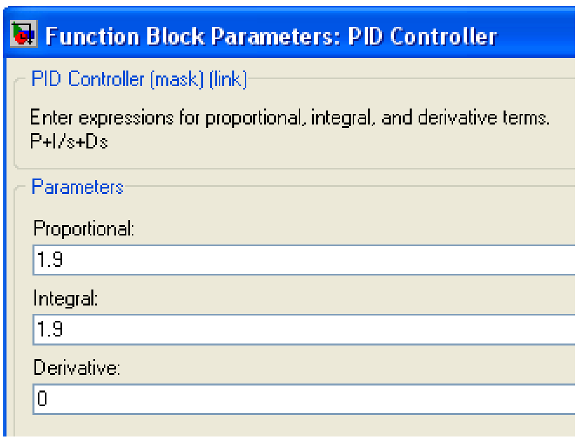

```
yz=step(conv(lo, mr), l+m, t);
plot(t, y, t, yz), grid
max(yz)
```

0.30

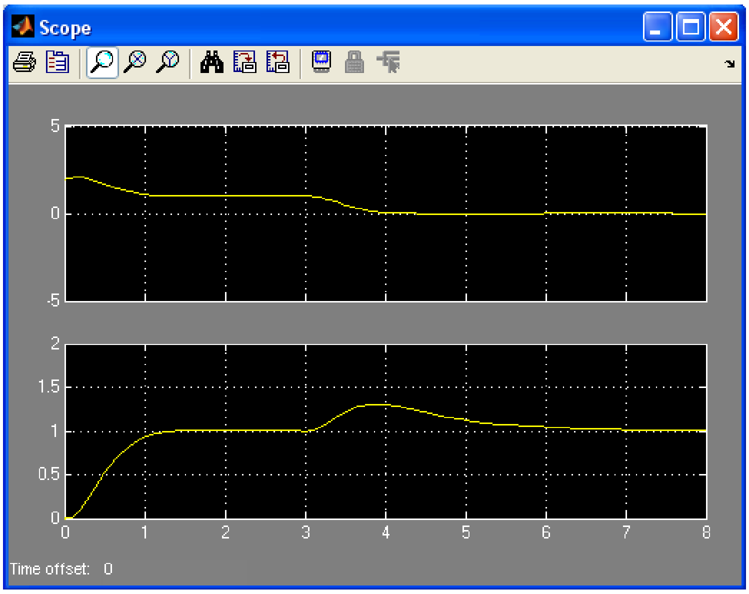
Wniosek. Zakłócenie jest silnie tłumione.

3. Simulink





$P=k_p=1.9$
$I=k_p/T_i=1.9$
$D=k_pT_d=0$



Step: $S.t. - 0 \quad F.v. - 1 \qquad Step1: S.t. - 3, \; F.v. - 1$

PRZYKŁAD II – OBIEKT „TRUDNY”

1. Obiekt

- Obiekt „prawdziwy” i aproksymacja (zob. *Identyfikacja*)

$$\frac{1}{(s+1)^5} \quad \rightarrow \quad \underline{\frac{1}{(1.69s+1)^2}e^{-1.53s}}$$

$$T = 1.69, \qquad \tau = 1.53, \qquad k_o = 1$$

Obiekty „trudne”, to obiekty z dominującym opóźnieniem. W praktyce spotyka się je rzadko.

2. Regulator PID

- $$k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_d s}{\frac{T_d}{D}s+1}\right) \;=\; k_p\frac{T_i T_d\left(1+\frac{1}{D}\right)s^2+\left(T_i+\frac{T_d}{D}\right)s+1}{T_i s\left(\frac{T_d}{D}s+1\right)}$$
- Nastawy

$$T_i = 2T = 2*1.69, \qquad T_d = \frac{T_i}{4}, \qquad k_p = 0.7\frac{1}{k_o}\cdot\frac{T}{\tau} = 0.7\frac{1.69}{1.53} \cong 0.77$$

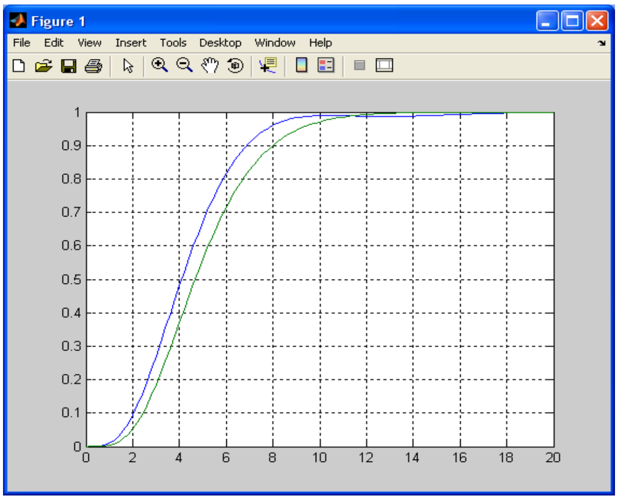
$$t_r = 5\tau = 5\cdot 1.53 = 7.65$$

3. Matlab

- Odpowiedź na wielkość zadaną

```
Ti=2*1.69; Td=Ti/4; kp=0.77; D=5;
lr=kp*[Ti*Td*(1+1/D)  (Ti+Td/D)  1];
mr=[Ti*Td/D  Ti  0];

lo=1; mo=conv([1  1], [1  1]);
mo=conv(mo,  mo),  mo=conv([1    1],
mo);
lo=[0  0  0  0  0  lo];
l=conv(lr, lo); m=conv(mr, mo);
t=0: 0.2:20;
y=step(l, l+m, t);
yo=step(lo, mo, t);
plot(t, y, t, yo), grid
```

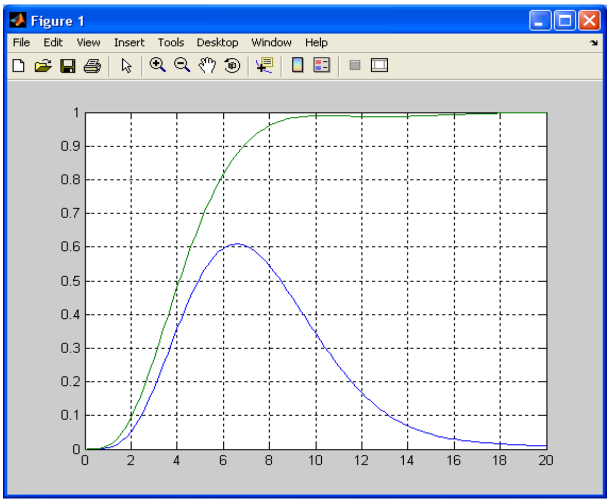


Wniosek. Oszacowanie t_r = 7.65 jest miarodajne.

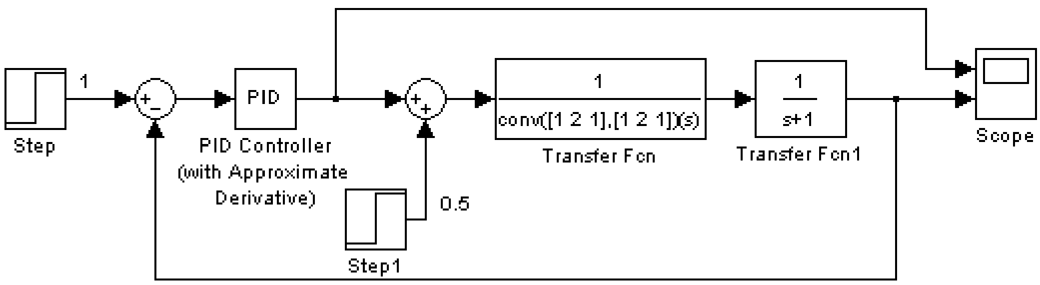
- Odpowiedź na zakłócenie

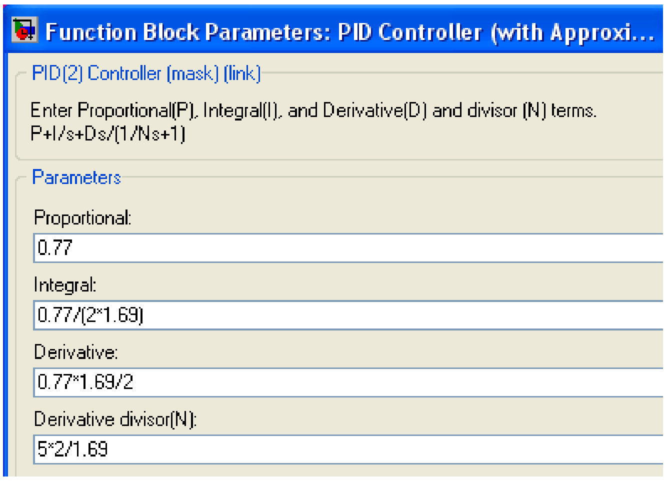
```
yz=step(conv(lo, mr), l+m, t);
plot(t, yz, t, y), grid
max(yz)
   0.60
```

Wniosek. Układ zamknięty kompensuje wpływ stałego, utrzymującego się zakłócenia.



4. Simulink

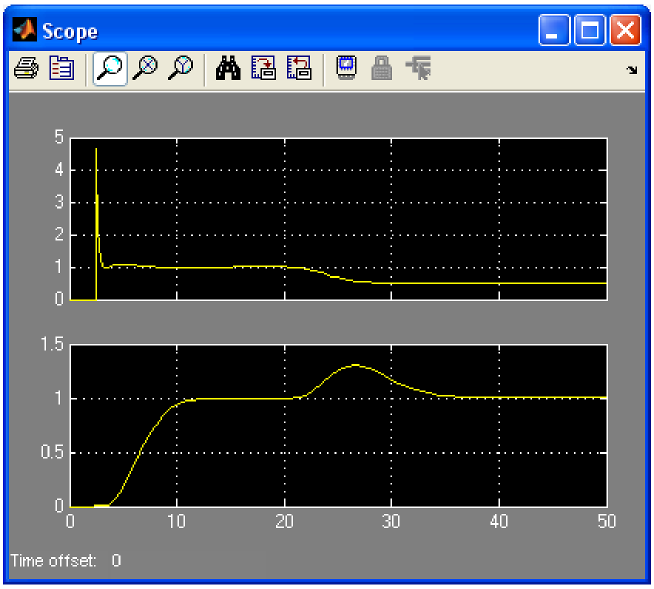




$$\frac{Ds}{\frac{1}{N}s+1} \quad \text{odpowiada} \quad \frac{k_p T_d s}{\frac{T_d}{D}s+1}$$

Zatem $N = \dfrac{D}{T_d}$.

Przyjęto $D = 5$ (jak Siemens).



Step: *S.t.* – 2.5, *F.v.* – 1 *Step1*: *S.t.* – 20, *F.v.* – 0.5 (dwukrotnie mniej)

PORADNIK INŻYNIERA – AUTOMATYKA

Wydawnictwa Naukowo–Techniczne. Warszawa. 1975

1. Nastawy regulatorów dla obiektu $\dfrac{k_o}{Ts+1}e^{-\tau s}$

- Tabela nastaw (fragment)
  Przeregulowanie $\cong 0$, minimalny czas regulacji

Regulator	$k_p k_o \dfrac{\tau}{T}$	$\dfrac{T_i}{\tau}$	$\dfrac{T_d}{\tau}$
PI	0.6	$0.8 + 0.5\dfrac{T}{\tau}$	–
PID	0.95	2.4	0.4

- Obiekt „trudny” – aproksymacja transmitancją $\frac{k_o}{Ts+1}e^{-\tau s}$

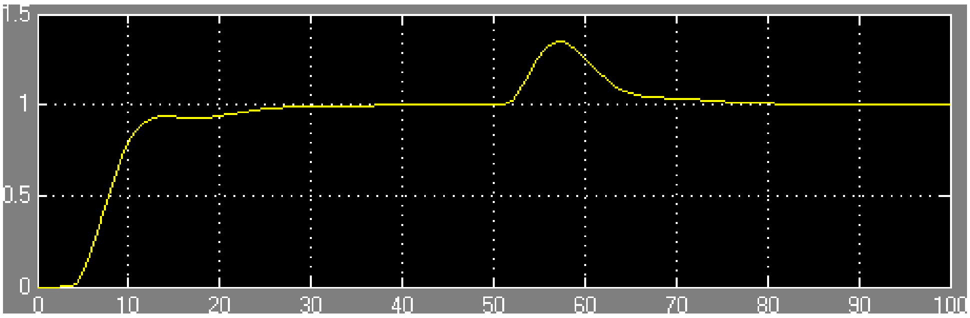
  $t_{10} = 3.15$, $t_{90} = 9.3$ – zob. Identyfikacja obiektów

  $T = \frac{t_{90} - t_{10}}{2.2} = 2.795 \cong 2.8$, $\quad \tau = t_{10} - 0.1\mathrm{T} = 2.87 \cong 2.9.$

  Obiekt dla doboru nastaw – $\frac{1}{2.8s+1}e^{-2.9s}$

- Regulator PI

  $k_p = 0.6\frac{1}{k_o}\frac{T}{\tau} = 0.6\frac{2.8}{2.9} = 0.58, \qquad T_i = 0.5T + 0.8\tau = 3.72$

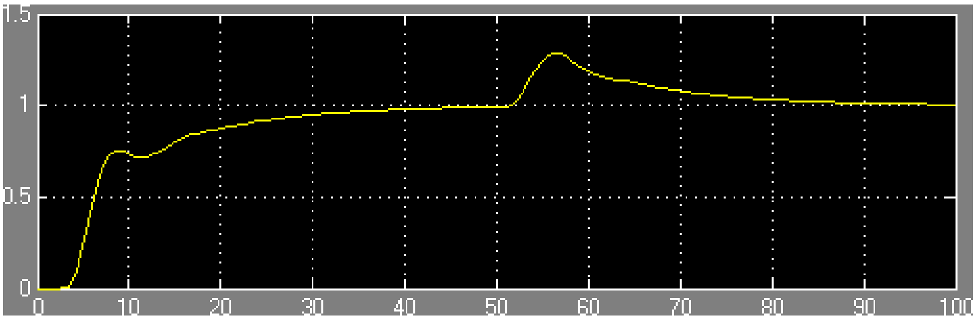


P=0.58
I=0.58/3.72
D=0

Porównanie. Przebiegi wyglądają nieco gorzej niż poprzednio.

- Regulator PID

  $k_p = 0.95\frac{1}{k_o}\frac{T}{\tau} = 0.92, \qquad T_i = 2.4\tau = 7.0, \qquad T_d = 0.4\tau = 1.2$



P=0.92
I=0.92/7.0
D=$0.92 \cdot 1.2$
N=$5/(0.92 \cdot 1.2)$

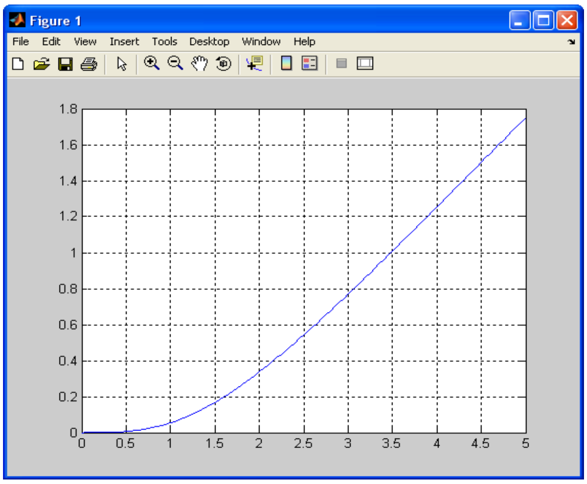
Porównanie. Czas regulacji dłuższy niż PI (trochę lepsze tłumienie zakłóceń).

2. Obiekt całkujący $\frac{1}{T_c s}e^{-\tau s}$

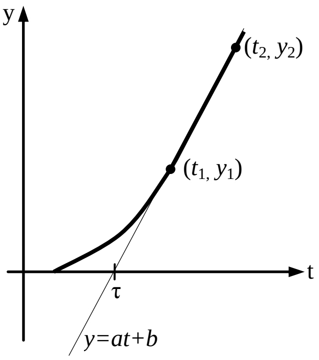
- Przykład $\frac{1}{2s(0.5s+1)^3}$

Matlab

```
t=0:0.05:5;
yo=step(1, 2*[.125  .75  1.5  1  0], t);
plot(t, yo), grid
```



- Aproksymacja obkektu transmitancją $\frac{1}{T_c s} e^{-\tau s}$



Matlab
[t' yo]
...
(t_1, y_1):   3.0   0.7704
...
(t_2, y_2):   5.0   1.7508

y=at+b

$0.7704 = a \cdot 3 + b$
$1.7508 = a \cdot 5 + b \quad \rightarrow \quad a = 0.9804, \quad b = -0.7056$

$$T_c = \frac{1}{a} \cong 2.04$$

$$\tau: \quad 0 = 0.9804 \cdot \tau - 0.7056 \quad \rightarrow \quad \tau = 1.44$$

Obiekt dla doboru nastaw – $\frac{1}{2.04s} e^{-1.44s}$

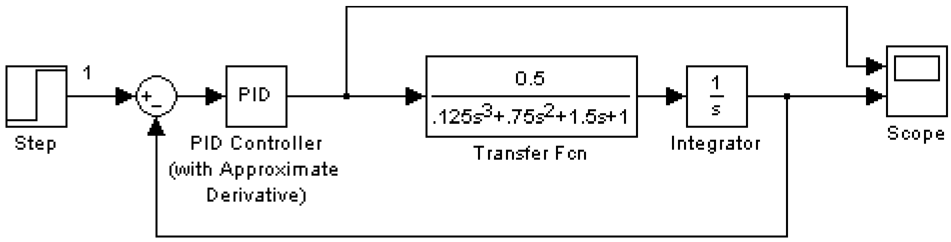
3. Nastawy regulatorów dla obiektu $\frac{1}{T_c s} e^{-\tau s}$

- Przeregulowanie $\cong 0$, minimum t_r (według Poradnika)

Regulator	$k_p \frac{\tau}{T_c}$	$\frac{T_i}{\tau}$	$\frac{T_d}{\tau}$
PI	0.46	5.75	–
PID	0.65	5.0	0.23

Tabele nastaw regulatorów PID podane w Poradniku Inżyniera – Automatyka nie są jedynymi. W literaturze anglosaskiej spotyka się dość podobne tabele opracowane przez Cohena i Coona.

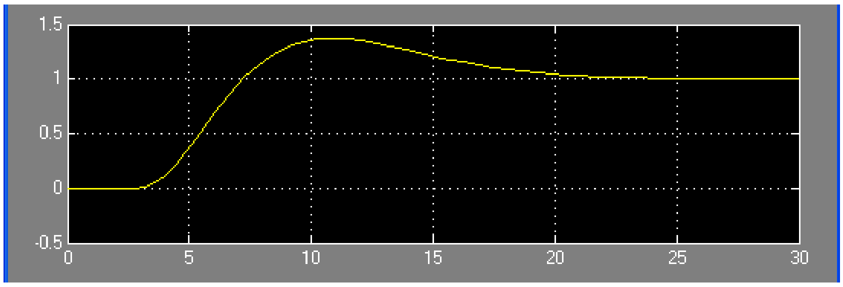
- Simulink



Step: *S.t.* -2.5, *F.v.* -1

- Regulator PI

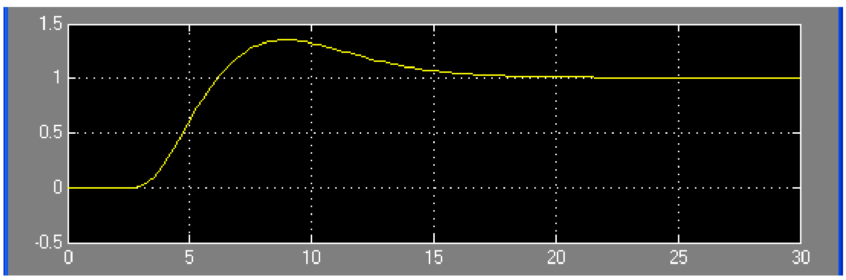
$$k_p = 0.46\frac{T_c}{\tau} = 0.46\frac{2.04}{1.44} = 0.65, \qquad T_i = 5.75\cdot\tau = 5.75\cdot 1.44 = 8.28$$



P=0.65
I=0.65/8.28

- Regulator PID

$$k_p = 0.65\frac{T_c}{\tau} = 0.92, \qquad T_i = 5\tau = 7.2, \qquad T_d = 0.23\cdot\tau = 0.33$$



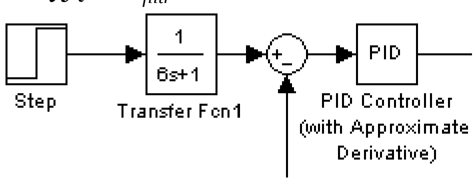
P=0.92
I=0.92/7.2
D=0.30
N=5/0.30

Porównanie. Przebieg dla regulatora PID wygląda korzystniej.

4. Eliminacja przeregulowania przez filtrację wielkości zadanej

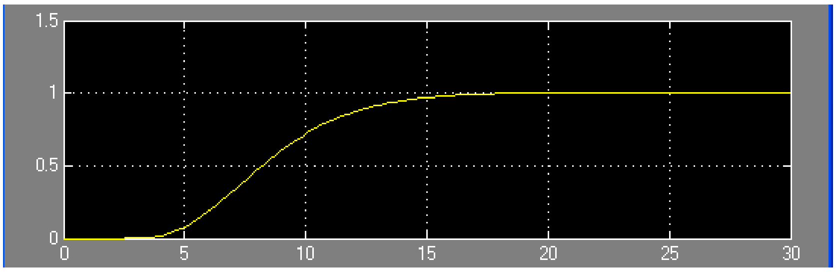
- Stałą czasową filtru wybiera się eksperymentalnie w przedziale $(\frac{T_i}{2}...T_i)$

Przyjęto $T_{filtr} = 6$.



P, I, D, N – jak poprzednio

- Odpowiedź skokowa



Uwaga. Czas regulacji szacuje się jako $t_r \cong 10\tau$.