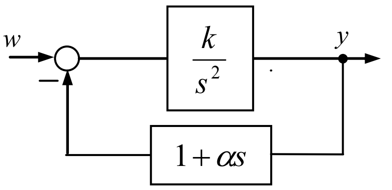
DYNAMIKA UKŁADÓW II RZĘDU

Dwa układy regulacji. Transformaty Laplace'a. Przebieg aperiodyczny. Przebieg aperiodyczny krytyczny. Przebieg oscylacyjny. Ekstrema odpowiedzi oscylacyjnej. Wpływ dodatkowego zera i bieguna.

DWA UKŁADY REGULACJI

1. Serwomechanizm ze sterowaniem prądowym

- Schemat uproszczony



$$k = \frac{k_p}{J}, \quad \alpha = T_d$$

sprzężenie pozycyjne i tachometryczne

- Transmitancja układu

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\frac{k}{s^2}}{1+\frac{(1+\alpha s)\,k}{s^2}} = \frac{k}{s^2+\alpha k s + k} = \boxed{\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}}$$

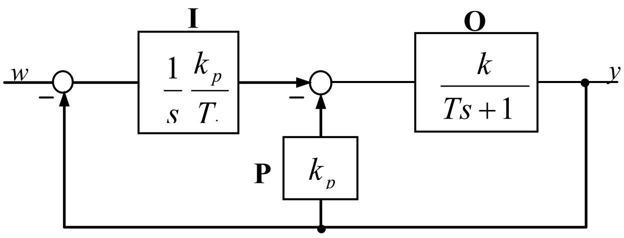
gdzie:

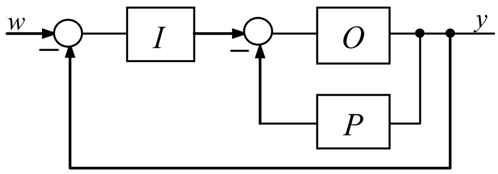
ω_n - częstotliwość drgań naturalnych (niegasnących),
ξ - współczynnik tłumienia,

$$\omega_n^2 = k, \quad \zeta = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{k}$$

2. Układ regulacji poziomu

- „Rozdzielony" regulator PI





PI: $k_p(1+\frac{1}{T_i s}) = k_p + \frac{1}{s}\frac{k_p}{T_i} = k_p + k_i\frac{1}{s}$, gdzie $k_i = \frac{k_p}{T_i}$

- Transmitancja układu

$$\frac{Y(s)}{W(s)}=\frac{I\dfrac{O}{1+OP}}{1+I\dfrac{O}{1+OP}}=\frac{IO}{1+PO+IO}=\frac{\dfrac{k_i}{s}\dfrac{k}{Ts+1}}{1+k_p\dfrac{k}{Ts+1}+\dfrac{k_i}{s}\dfrac{k}{Ts+1}}=$$

$$=\frac{k_ik}{Ts^2+s(1+k_pk)+k_ik}=\frac{\dfrac{k_ik}{T}}{s^2+\dfrac{1+k_pk}{T}s+\dfrac{k_ik}{T}}=\boxed{\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2}}$$

Gdyby cały regulator PI umieścić w torze głównym, to nie otrzymalibyśmy standardowej transmitancji 2-go rzędu (nastąpiłaby zmiana w liczniku). Struktura rozdzielona jest preferowana przez praktyków dla uniknięcia przeregulowania (zob. dalej). Przeregulowania można też uniknąć filtrując wielkość zadaną.

Uwaga. Proste serwomechanizmy i układy automatyzacji procesów są opisane standardowymi transmitancjami 2-go rzędu.

3. Pierwiastki mianownika – bieguny

- Transformata Laplace'a odpowiedzi skokowej

$$W(s)=\frac{1}{s},\qquad Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s},\qquad \Delta=4\xi^2\omega_n^2-4\omega_n^2=4\omega_n^2(\xi^2-1)$$

- Zależnie od współczynnika tłumienia ξ pierwiastki mianownika są:

$\xi > 1$ – rzeczywiste różne

$\xi = 1$ – jednakowe (pierwiastek podwójny)

$\xi < 1$ – zespolone

Kształt odpowiedzi zależy przede wszystkim od współczynnika tłumienia ξ, a czas od częstotliwości ω_n .

TRANSFORMATY LAPLACE′A

1. Wzory ogólne

$f(t)$	$F(s)$
$\frac{d}{dt}f(t)$	$sF(s)-f_0$
$\int_o^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$

$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
$f(t-\tau)$	$e^{-\tau s}F(s)$

2. Transformaty elementarne

$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2!}t^2$	$\frac{1}{s^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$1-(1+at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$

3. Funkcje trygonometryczne

$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{\sigma t}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$
$e^{\sigma t}\cos \omega t$	$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$

4. Stała czasowa

$1-e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(Ts+1)}$

$t-\frac{1}{T}\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$	$\frac{1}{s^2(Ts+1)}$
$1-\left(1+\frac{t}{T}\right)e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(Ts+1)^2}$

PRZEBIEG APERIODYCZNY

1. $\xi > 1 \;\Rightarrow\; \Delta > 0$

- Dwa pierwiastki rzeczywiste różne s_1, s_2, takie że $s_1 \cdot s_2 = \omega_n^2$

  Rozkład na ułamki proste:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)}\frac{1}{s} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s-s_1} + \frac{R_2}{s-s_2}$$

Residua R_0, R_1, R_2 oblicza się metodą przysłaniania.

2. Pierwiastki jednokrotne

- Przypadek ogólny

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdot a'(s)} = \frac{R_1}{s-p_1} + \frac{R_2}{s-p_2} + \cdots$$

$$R_i = (s-p_i)\cdot F(s)|_{s=p_i} = \left.\frac{b(s)}{a'(s)}\right|_{s=p_i}$$ – tzw. *metoda przysłaniania*

$$f(t) = R_1 e^{p_1 t} + R_2 e^{p_2 t} + \cdots$$

Kropki po prawej stronie rozwinięcia $F(s)$ reprezentują ułamki odpowiadające pierwiastkom pozostałej części mianownika.

3. Obliczenia

- $p_1 = 0, \quad p_2 = s_1, \quad p_3 = s_2$

$$R_0 = \frac{\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)}\Big|_{s=0} = \frac{\omega_n^2}{(-s_1)\cdot(-s_2)} = \frac{\omega_n^2}{s_1 s_2} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = 1$$

- Oznaczmy: $s_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad s_2 = -\frac{1}{T_2}$

$$R_1 = \frac{\omega_n^2}{s(s-s_2)}\Big|_{s=s_1} = \frac{s_1 s_2}{s_1\,(s_1-s_2)} = \frac{s_2}{s_1-s_2} = \frac{-\frac{1}{T_2}}{-\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}} = -\frac{T_1}{T_1-T_2}$$

Podobnie

$$R_2 = \frac{\omega_n^2}{s(s-s_1)}\Big|_{s=s_2} = \frac{\omega_n^2}{s_2\,(s_2-s_1)} = \frac{s_1}{s_2-s_1} = \frac{-\frac{1}{T_1}}{-\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}} = \frac{T_2}{T_1-T_2}$$

- Odpowiedź

$$\boxed{y(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}}$$

Jest to tzw. przebieg *aperiodyczny* zwykły (o dwóch stałych czasowych).

PRZEBIEG APERIODYCZNY KRYTYCZNY

1. $\xi = 1 \;\; \Rightarrow \;\; \Delta = 0$

- Jeden pierwiastek podwójny $s_{1,2} = -\omega_n$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}\frac{1}{s} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s+\omega_n} + \frac{R_2}{(s+\omega_n)^2}$$

2. Pierwiastki wielokrotne

- Przypadek ogólny

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{(s-p)^m \cdot a''(s)} = \frac{R_1}{s-p} + \frac{R_2}{(s-p)^2} + \cdots + \frac{R_m}{(s-p)^m} + \cdots$$

Rezidua R_i oblicza się również metodą przesłaniania, ale zaczynając „od końca", tj.:

$$R_m = \underbrace{(s-p)^m F(s)}_{\alpha_1(s)}\Big|_{s=p} = \underbrace{\frac{b(s)}{a''(s)}}_{\alpha_1(s)}\Big|_{s=p} = \alpha_1(s)|_{s=p}$$

$$R_{m-1} = \frac{1}{1!}\underbrace{\frac{d}{ds}\alpha_1(s)}_{\alpha_2(s)}\Big|_{s=p} = \alpha_2(s)|_{s=p}, \qquad R_{m-2} = \frac{1}{2!}\underbrace{\frac{d}{ds}\alpha_2(s)}_{\alpha_3(s)}\Big|_{s=p} = \frac{1}{2}\alpha_3(s)\Big|_{s=p}$$

...

$$R_1 = \frac{1}{(m-1)!}\underbrace{\frac{d}{ds}\alpha_{m-1}(s)}_{\alpha_m(s)}\Big|_{s=p} = \frac{1}{(m-1)!}\alpha_m(s)\Big|_{s=p}$$

- Ponieważ $\frac{R_i}{(s-p)^i} \;\Rightarrow\; \frac{1}{(i-1)!}R_i t^{i-1} e^{pt}$, więc

$$f(t) = R_1 e^{pt} + R_2 t e^{pt} + \frac{1}{2} R_3 t^2 e^{pt} + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} R_m t^{m-1} e^{pt} + \cdots = (R_1 + R_2 t + \frac{1}{2} R_3 t^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} R_m t^{m-1}) e^{pt} + \cdots$$

W szczególności dla $m=3$ mamy

$$f(t) = (R_1 + R_2 t + \tfrac{1}{2} R_3 t^2) e^{pt} + \cdots,$$

gdzie $R_3 = \alpha_1(p)$, $R_2 = \alpha_2(p)$, $R_1 = \frac{1}{2}\alpha_3(p)$,

3. Obliczenia

- $p_0 = 0$, $p = -\omega_n$, $Y(s) = \dfrac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} \cdot \dfrac{1}{s}$

  $$R_0 = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}\Big|_{s=0} = 1, \quad R_2 = \frac{\omega_n^2}{s}\Big|_{s=-\omega_n} = -\omega_n, \quad R_1 = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_n^2}{s}\right)\Big|_{s=-\omega_n} = -\frac{\omega_n^2}{s^2}\Big|_{s=-\omega_n} = -1$$

  $$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$

  Na podstawie drugiej tabeli transformat mamy

  $$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$$

- Niech $T = \dfrac{1}{\omega_n}$. Wtedy

  $$\boxed{y(t) = 1 - (1 + \frac{t}{T}) e^{-\frac{t}{T}}}$$

  Jest to przebieg *aperiodyczny krytyczny*. W nastawianiu serwomechanizmów chodzi o uzyskanie właśnie takiego przebiegu.

- Zapisując $Y(s)$ za pomocą stałej czasowej T jako

  $$Y(s) = \frac{1}{(Ts+1)^2}\frac{1}{s}$$

  powyższy wzór otrzymuje się wprost z czwartej tabeli transformat Laplace'a.

PRZEBIEG OSCYLACYJNY

1. $\xi < 1 \;\Rightarrow\; \Delta < 0$

Dwa pierwiastki zespolone

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \sigma \pm j\omega,$$

gdzie: $\delta = -\xi\omega_n$, $\omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ – częstotliwość drgań tłumionych

- Ponieważ $(s-s_1)(s-s_2) = (s-\sigma)^2 + \omega^2$, więc

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s-\sigma)^2+\omega^2}\frac{1}{s}$$

2. Pierwiastki zespolone

- Przypadek ogólny

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{(s-p)(s-p^*)\cdot a''(s)}, \quad \text{gdzie} \quad \begin{array}{l} p = \sigma + j\omega \\ p^* = \sigma - j\omega \end{array}$$

Ponieważ $(s-p)(s-p^*) = (s-\sigma)^2 + \omega^2$, więc

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{[(s-\sigma)^2+\omega^2]\,a'''(s)} = \frac{C(s-\sigma)+S\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \cdots$$

- Przysłaniając obydwa czynniki i podstawiając $s = \delta + j\omega$ otrzymuje się

$$C(s-\sigma) + S\omega|_{s=\sigma+j\omega} = \omega(S+jC) = [(s-\sigma)^2+\omega^2]F(s)|_{s=\sigma+j\omega},$$

zatem

$$S + jC = \frac{1}{\omega}[(s-\sigma)^2+\omega^2]F(s)|_{s=\sigma+j\omega}$$

- Na podstawie trzeciej tabeli transformat

$$f(t) = e^{\sigma t}(C\cos\omega t + S\sin\omega t) + \cdots$$

Dlatego S i C są nazywane „amplitudami sinusa i cosinusa”.

3. Obliczenia

- Zapis wyjściowy

$$Y(s) = \frac{R_0}{s} + \frac{C(s-\sigma)+S\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$$

$$R_0 = \frac{\omega_n^2}{(s-\sigma)^2+\omega^2}|_{s=0} = \frac{\omega_n^2}{\sigma^2+\omega^2} = \frac{\omega_n^2}{(-\xi\omega_n)^2+(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = 1$$

- Amplitudy S, C

$$\frac{S\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} \Rightarrow Se^{\sigma t}\sin\omega t, \qquad \frac{C(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2} \Rightarrow Ce^{\sigma t}\cos\omega t$$

Według wzoru ogólnego

$$S + jC = \frac{1}{\omega}\left\{\left[(s-\sigma)^2+\omega^2\right]Y(s)\right\}\Big|_{s=\sigma+j\omega} = \left(\frac{1}{\omega}\frac{\omega_n^2}{s}\right)\Big|_{s=\sigma+j\omega} = \frac{1}{\omega}\frac{\omega_n^2}{\sigma+j\omega} =$$

$$= \frac{\omega_n^2}{\omega}\frac{\sigma-j\omega}{\sigma^2+\omega^2} = \frac{1}{\omega}(\sigma-j\omega) = \frac{\sigma}{\omega} - j = \frac{-\xi\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} - j = \frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - j = S + jC$$

Zatem

$$S = \frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,, \qquad C = -1$$

- Odpowiedź skokowa

$$\underline{y(t) = 1 + e^{\sigma t}\,(S \sin \omega t + C \cos \omega t)}$$

- Przekształcenia trygonometryczne:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta\,, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha = \omega t$$

$$S \sin \omega t + C \cos \omega t = \sqrt{S^2 + C^2}\;(\sin \omega t\,\underbrace{\frac{S}{\sqrt{S^2+C^2}}}_{\cos\beta} + \cos \omega t\,\underbrace{\frac{C}{\sqrt{S^2+C^2}}}_{\sin\beta}) = \sqrt{S^2+C^2}\;\sin(\omega t + \phi)\,,$$

gdzie $\quad \beta \equiv \phi$

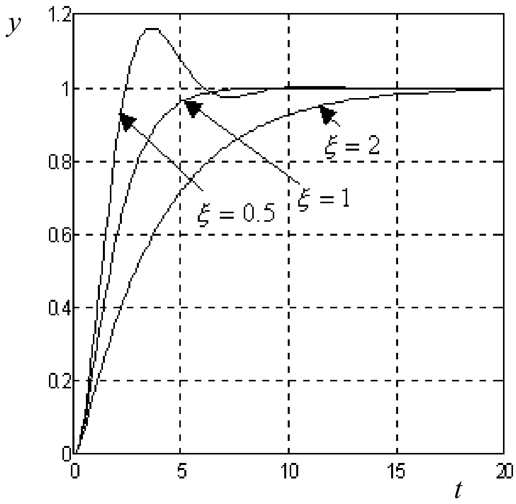
$$\phi = arctg\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = arctg\frac{C}{S} = arctg\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\,, \qquad \sqrt{S^2+C^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\boxed{y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{-\xi\omega_n t}\;sin(\omega t + \phi)}$$

Jest to *przebieg oscylacyjny*.

4. Matlab

```
omn=1
l=omn^2
% ξ >1
ksi=2
m=[1  2*ksi*omn  omn^2]
t=0:0.1:20;
y=step(l,m,t);
% ξ =1
ksi=1
m=[1  2*ksi*omn  omn^2]
y1=step(l,m,t);
% ξ <1
ksi=0.5
m=[1  2*ksi*omn  omn^2]
y2=step(l,m,t);
plot(t,y,t,y1,t,y2),grid
```



acyjne przebiegi nastawia się układy automatyzacji procesów technologicznych (ciśnienie, poziom, przepływ) ze względu na dobre tłumienie zakłóceń.

EKSTREMA ODPOWIEDZI OSCYLACYJNEJ

1. Wyznaczenie ekstremum

W celu wyznaczenia ekstremów odpowiedzi oscylacyjnej II rzędu można zastosować jedną z dwóch metod:

- określenie wyrażenia na pochodną $\frac{dy}{dt}$ w sposób tradycyjny i przyrównanie jej do zera (metoda często pracochłonna),
- skorzystanie z właściwości transformaty Laplace'a, tzn. ze wzoru na transformatę pochodnej:

$$\frac{dy}{dt} = L^{-1}\left[s\,Y(s)\right] = L^{-1}\left[\frac{\omega_n^2 \frac{1}{\omega}\,\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}\right] = \frac{\omega_n^2}{\omega} e^{\sigma t} \sin\omega t = 0$$

$$\omega t_i = \pi, 2\pi, 3\pi..., \ \omega t_i = i\pi, \qquad t_i = \frac{\pi}{\omega} i, \ \ t_i = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} i, \qquad i = 1, 2, 3...$$

$$\boxed{t_1 = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\omega}}$$

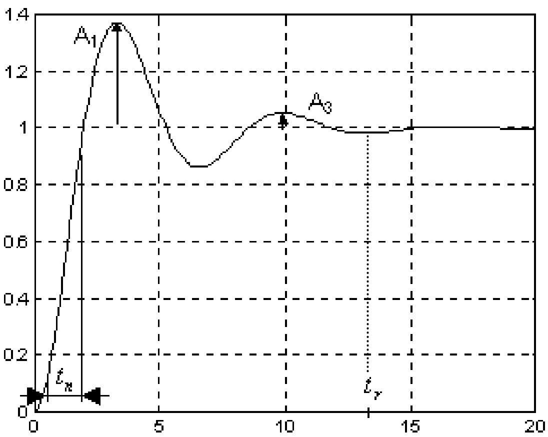
$$A_1 = y(t_1) - 1 = e^{\sigma t_1}\left(S\sin\omega t_1 + C\cos\omega t_1\right) = e^{\sigma t_1}\left(S\sin\pi + C\cos\pi\right) = -C\,e^{\sigma t_1} = e^{\sigma t_1} = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}},$$

ponieważ $\sigma = -\xi\omega_n$, $\quad C = -1$, $\quad t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

2. Parametry odpowiedzi oscylacyjnej

- przeregulowanie $p_{\%} = A_1 \cdot 100\%$,
- czas regulacji t_r,
- czas narastania t_n (10 do 90%)
- stopień tłumienia $d = \dfrac{A_3}{A_1}$

Podstawowe znaczenie mają $p_{\%}$ i t_r.



Przykład

$\omega_n = 1$

$\xi = 0.3$

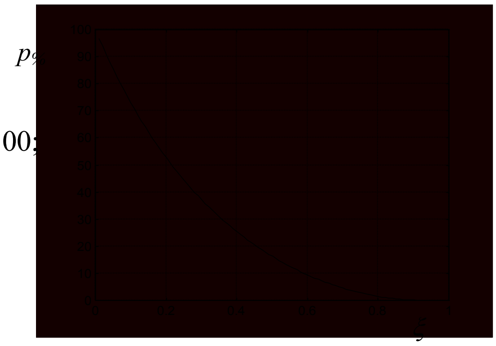
$T = \dfrac{1}{\xi\omega_n} = 3.333$

$t_r \approx 4T = 13.332$

3. Przeregulowanie $p_{\%}$

$$\boxed{p_{\%} = A_1 \cdot 100\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cdot 100\%} \qquad \xi = \frac{\left|\ln \frac{p_{\%}}{100}\right|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \frac{p_{\%}}{100}}}$$

- Matlab $p_{\%}(\xi)$

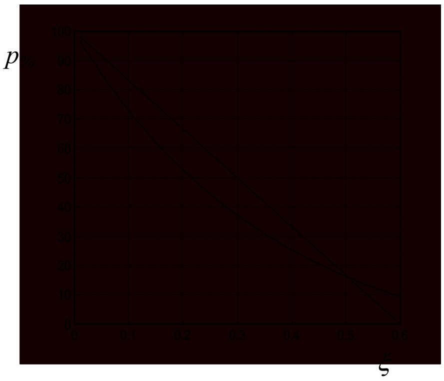


```
ksi=0.01:0.01:0.99;
p=exp(-pi*ksi./sqrt(1-ksi.*ksi))*100;
plot(ksi,p),grid
```

Dzielenie i mnożenie „z kropką” (wektory).

Wzór przybliżony $p_{\%} \approx (1 - \frac{\xi}{0.6}) \cdot 100\%, \quad \xi < 0.6$

- Matlab



```
ksi=0.01:0.01:0.6;
p=exp(-pi*ksi./sqrt(1-ksi.*ksi))*100;
paproks=(1-ksi/0.6)*100;
plot(ksi,p,ksi,paproks),grid
```

4. Czas regulacji t_r

$\frac{t}{T}$	$e^{-\frac{t}{T}}$	
0.0	1.0	
1.0	0.3679	
2.0	0.1353	
3.0	0.0495	$\cong 5\%$
4.0	0.0183	$\cong 2\%$
4.6	0.0100	1%

$$\boxed{t_r \underset{2\%}{\cong} \frac{4}{\xi\omega_n}}$$

$$t_r \underset{5\%}{\cong} \frac{3}{\xi\omega_n}, \qquad t_r \underset{1\%}{\cong} \frac{4.6}{\xi\omega_n}$$

5. Serwomechanizm i regulator PI

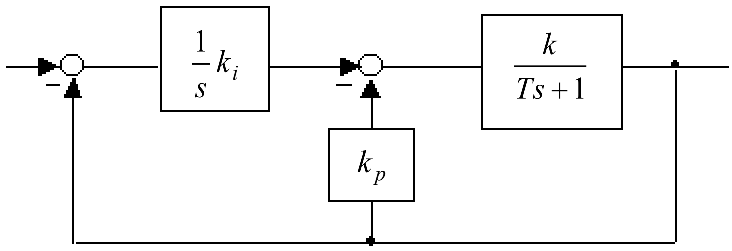
- Dla serwomechanizmu prądowego (zob. wcześniej) znaleźć k i α, gdy dane są T_{zam}= 0.1, $p_{\%}$= 0.

$\boxed{p_{\%} = 0 \text{ oznacza } \xi = 1 \text{ – przebiegi aperiodyczne krytyczne.}}$

$$t_r = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{\omega_n} = 4\,T_{zam} = 0.4 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 10$$

$$G_{zam} = \frac{k}{s^2 + k\alpha s + k} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad 2\xi\omega_n = k\alpha,\ k = \omega_n^2 \ \Rightarrow\ \underline{k = 100, \quad \alpha = 0.2}$$

- Dobrać nastawy regulatora PI w układzie regulacji poziomu dla danych $p_{\%} = 20\%$, $t_r = 0.5$.



$$G_{zam} = \frac{\dfrac{k_i k}{T}}{s^2 + \dfrac{1 + k_p k}{T}s + \dfrac{k_i k}{T}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \qquad k_p,\ k_i = ? \qquad (k = 2,\ T = 0.926 \text{ h})$$

$$\xi = \frac{\left|\ln \dfrac{p_{\%}}{100}\right|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \dfrac{p_{\%}}{100}}} \underset{20\%}{=} 0.456, \quad t_r = 0.5 = \frac{4}{\xi\omega_n} \ \Rightarrow\ \omega_n = 17.54$$

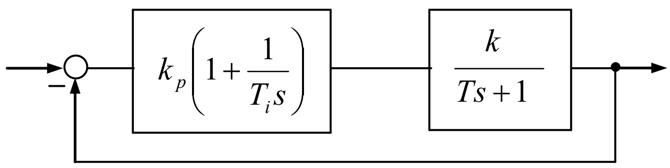
$$\omega_n^2 = \frac{k_i k}{T} = 17.54^2 \ \Rightarrow\ k_i = 142.5, \quad 2\xi\omega_n = \frac{1 + k_p k}{T} \ \Rightarrow\ \underline{k_p = 6.9}$$

$$T_i = \frac{k_p}{k_i} = \frac{6.9}{142.5} = 0.048 \text{ h} = 2.9 \text{ min} = \underline{174\ s}$$

WPŁYW DODATKOWEGO ZERA I BIEGUNA

1. Wpływ zera

- Układ regulacji poziomu ze standardowym regulatorem PI (nierozdzielonym) ma postać jak niżej



$k = 2, \qquad \omega_n = 17.54$
$T_i = 0.048, \quad \xi = 0.456$
$k_p = 6.9$

PI: $\quad k_p\left(1 + \dfrac{1}{T_i s}\right) = k_p \dfrac{s + \dfrac{1}{T_i}}{s}$

$$G_{zam} = \frac{k_p \dfrac{s + 1/T_i}{s} \dfrac{k}{Ts+1}}{1 + k_p \dfrac{s + 1/T_i}{s} \dfrac{k}{Ts+1}} = \frac{k_p k (s + 1/T_i)}{Ts^2 + s + kk_p (s + 1/T_i)} = \frac{\dfrac{kk_p}{TT_i}(T_i s + 1)}{s^2 + \dfrac{1 + kk_p}{T}s + \dfrac{kk_p}{TT_i}}$$

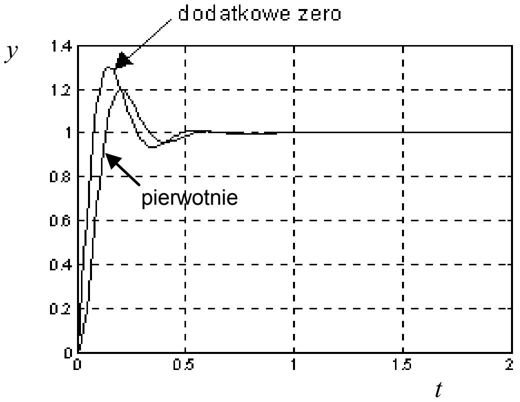
$$\frac{kk_p}{TT_i} = \omega_n^2, \qquad \frac{1+kk_p}{T} = 2\xi\omega_n$$

$$G_{zam} = \frac{17.54^2(0.048s+1)}{s^2 + 2\cdot 0.456\cdot 17.54\cdot s + 17.54^2} \quad -$$ dodatkowe zero w liczniku

- Matlab

```
omn=17.54
ksi=0.456
l=omn^2
m=[1  2*ksi*omn  omn^2]
t=0:0.01:2;
y=step(l,m,t);
Ti=0.048

% dodatkowe zero
l=conv(l,[Ti  1])
y1=step(l,m,t);
plot(t,y,t,y1), grid
```



Jak widać przeregulowanie wzrosło (niekorzystnie).

Uwaga. Przez rozdzielenie PI na P+I, a PID na PI+D (ewentualnie I+PD) można uniknąć wprowadzania zer do licznika transmitancji układu zamkniętego, czyli nadmiernych przeregulowań.

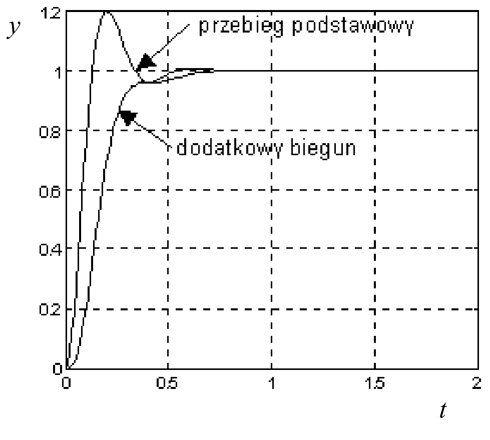
2. Wpływ bieguna

$$G_{zam} = \frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Matlab

```
omn=17.54
ksi=0.456
T=0.125
l=omn^2
m=[1  2*ksi*omn  omn^2]
t=0:0.01:2;
y=step(l,m,t);

% dodatkowy biegun
m=conv(m,[T  1])
y2=step(l,m,t);
plot(t,y,t,y2),grid
```



Uwaga. Pojawienie się dodatkowego bieguna powoduje eliminację, a przynajmniej zmniejszenie przeregulowania (korzystnie). Zatem przeregulowanie można wyeliminować przez dodanie filtru wielkości zadanej przed wprowadzeniem jej na układ ze sprzężeniem zwrotnym.