PRz – AiRA

# IDENTYFIKACJA OBIEKTÓW

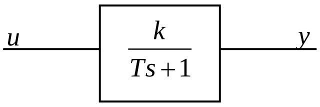
Odpowiedzi skokowe. Aproksymacje – przykład I. Aproksymacja – przykład II.

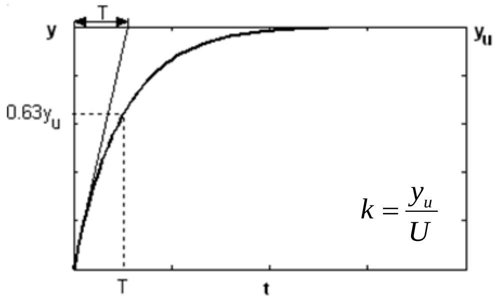
## ODPOWIEDZI SKOKOWE

### 1. Skok sterowania

Sygnał sterujący jest zmieniany skokowo w punkcie pracy obiektu.
$u(t) = U \cdot 1(t)$ – np. $U$=0.1 – 10% zakresu

### 2. Inercja pierwszego rzędu



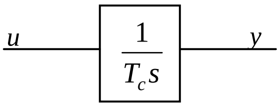



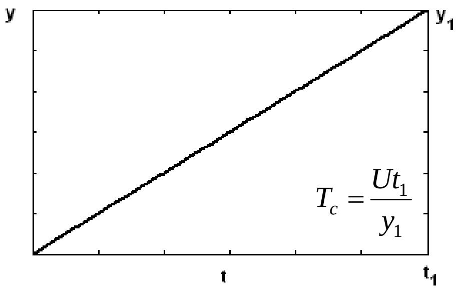

$$y(t) = kU(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

$$y(t \to \infty) = y_u = kU$$

$$y(t = T) = kU(1 - e^{-1}) \cong 0.63kU = 0.63y_u$$

### 3. Integrator

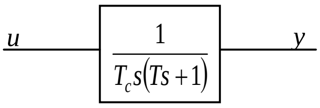


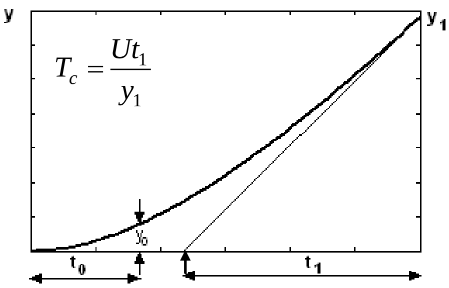




$$y(t) = \frac{1}{T_c} Ut \qquad T_c - \text{ czas całkowania}$$

$$y_1 = \frac{1}{T_c} Ut_1$$

### 4. Integrator z inercją




$$y(t) = \frac{1}{T_c} U \left[ t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \right]$$

$(t_0, y_0)$ - dowolny punkt na łuku

$$y_0 = \frac{1}{T_c} U \left[ t_0 - T(1 - e^{-\frac{t_0}{T}}) \right]$$

$$T_c \frac{y_0}{U} = t_0 - T(1 - e^{-\frac{t_0}{T}}) \quad \to \quad \frac{T_c y_0}{Ut_0} = c, \qquad \frac{t_0}{T} = x$$

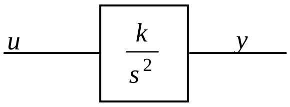
$$c = 1 - \frac{1 - e^{-x}}{x}$$

Dla konkretnego *c* należy rozwiązać to równanie i obliczyć *x*. Wtedy $T = \frac{t_0}{x}$.

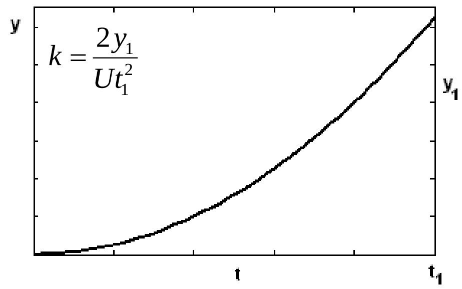
Przykładowe wyniki

| **c** | 0.05 | 0.1 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 | 0.40 | 0.45 | 0.5 | 0.55 | 0.60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **x** | 0.103 | 0.215 | 0.334 | 0.464 | 0.606 | 0.761 | 0.934 | 1.126 | 1.344 | 1.593 | 1.884 | 2.231 |

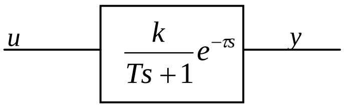
## 5. Podwójny integrator



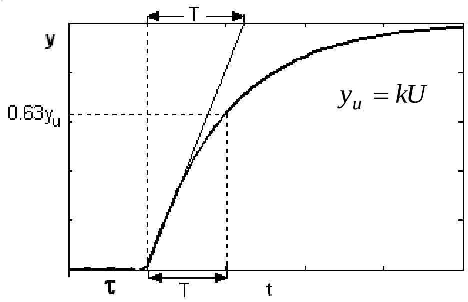

$$y(t) = kU\frac{t^2}{2}$$



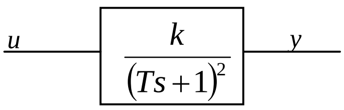

## 6. Inercja z opóźnieniem




$\tau$ odczytywane z wykresu




## 7. Podwójna inercja



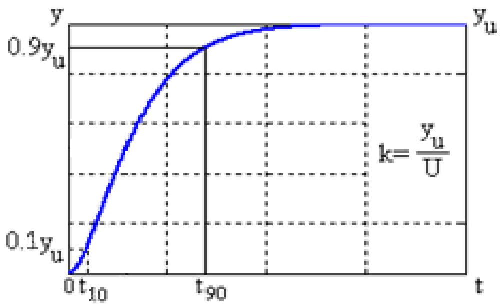

$$y(t) = kU\left[1 - (1 + \frac{t}{T})e^{-\frac{t}{T}}\right]$$

Czasy $t_{10}$, $t_{90}$

$$0.1 = 1 - (1 + \frac{t_{10}}{T})e^{-\frac{t_{10}}{T}} \quad \rightarrow \quad t_{10} = 0.53T$$

$$0.9 = 1 - (1 + \frac{t_{90}}{T})e^{-\frac{t_{90}}{T}} \quad \rightarrow \quad t_{90} = 3.89T$$

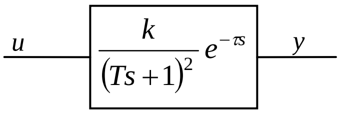
$$t_{90} - t_{10} = 3.36T$$




Matlab
x=0:0.01:4;    t/T
[x', (1-(1+x).*exp(-x))']

$$T \cong \frac{t_{90}-t_{10}}{3.3}$$

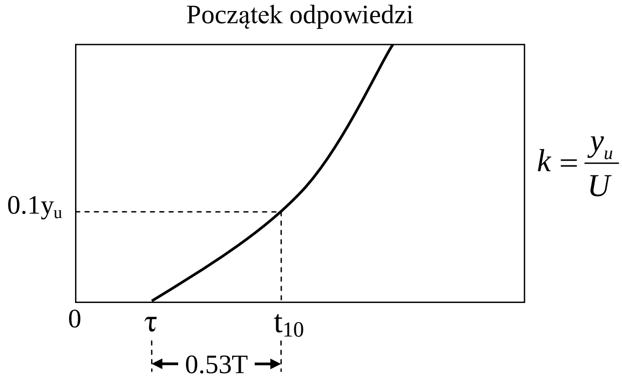
## 8. Podwójna inercja z opóźnieniem




$$\frac{k}{(Ts+1)^2}e^{-\tau s}$$

$$T = \frac{t_{90}-t_{10}}{3.3}$$

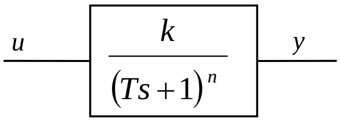
$$\tau = t_{10} - 0.53T$$




$$k = \frac{y_u}{U}$$

*Uwaga*. Opóźnienie $\tau$ nie jest wprost odczytywane z przebiegu, ale obliczane na podstawie $t_{10}$ i $t_{90}$. Gdyby obliczone $\tau$ okazało się ujemne, to należy przyjąć $\tau = 0$.

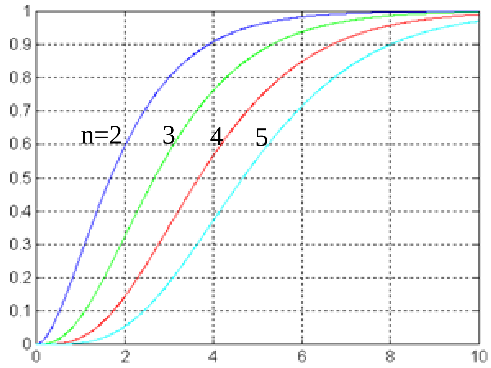
## 9. Wielokrotna inercja




$$\frac{k}{(Ts+1)^n}$$

Punkt przegięcia

$$t_P = (n-1)T$$




Wysokość punktu przegięcia

| n | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{y_P}{y_u}$ | 0.264 | 0.323 | 0.353 | 0.371 |

Im rząd wyższy, tym punkt przegięcia leży wyżej.

*Uwaga*. Obiekty wieloinercyjne można aproksymować transmitancją drugiego rzędu z opóźnieniem, tzn. $\frac{k}{(Ts+1)^2}e^{-\tau s}$, wyznaczając $k$, $T$ i $\tau$ według powyższych wzorów.

## 10. $t_{10}$ i $t_{90}$ a inercja z opóźnieniem

Jeżeli punkt przegięcia $y_P$ leży wyraźnie poniżej $0.264y_u$, to zamiast podwójnej inercji z opóźnieniem odpowiedniejsza jest inercja pierwszego rzędu z opóźnieniem, tj. $\frac{k}{Ts+1}e^{-\tau s}$.

Modyfikacje wzorów

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \rightarrow \quad 0.1 = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \rightarrow \quad t_{10} \cong 0.1T$$

$$0.9 = 1 - e^{-\frac{1}{T}} \rightarrow \quad t_{90} = 2.3T, \quad t_{90} - t_{10} = 2.2T$$

$$\underline{T \cong \frac{t_{90} - t_{10}}{2.2}}, \qquad \underline{\tau = t_{10} - 0.1T} \qquad \text{dla} \quad \frac{k}{Ts+1} e^{-\tau s}$$

(Jeśli $\tau < 0$, to przyjąć $\tau = 0$.)

## APROKSYMACJE – PRZYKŁAD I

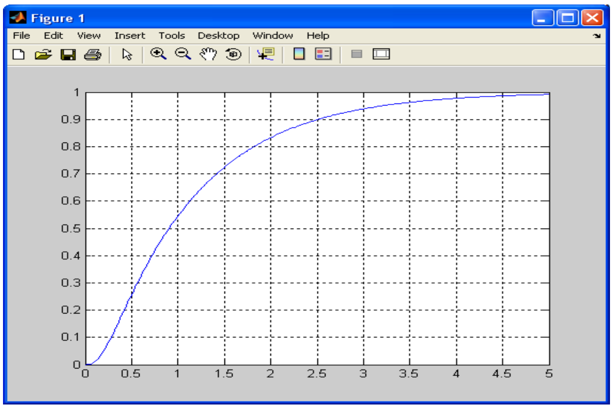
### 1. Obiekt

- „Prawdziwa” transmitancja
  $$\frac{1}{(s+1)(0.1s+1)^2}$$
- Odpowiedź skokowa – Matlab

  l = 1; m=conv([1 1], conv([0.1 1], [0.1 1]));

  t = 0:0.02:5; yo=step(l, m, t);

  plot(t,yo), grid




### 2. Punkt przegięcia

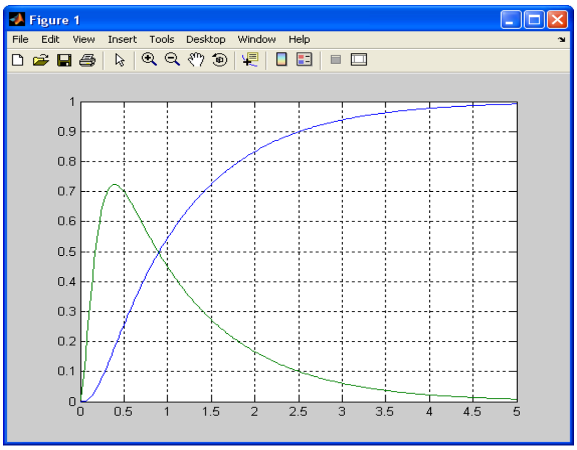
- Maksimum pochodnej $\frac{dy}{dt}$

  Odpowiedź $y_o$ jest zapisana w pliku tekstowym (praktycznie w każdym pakiecie, nie tylko w Matlabie). Aproksymację pochodnej $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ wyznacza się za pomocą pętli *for* (dowolny język).

- Matlab

```
size (yo)   →  251
dt = 0.02;
for i=1: 250;
yop(i)=(yo(i+1)–yo(i))/dt;      –  Δy/Δt
end                                pochodna
yop(251)=yop(250);  – wyrównanie rozmiaru
plot(t, yo, t, yop), grid

[t'  yo  yop']
   …
0.40   0.1849   0.7233  →  maksimum yop
   …
```




*Wniosek*. Punkt przegięcia przypada na 0.1849, tj. wyraźnie poniżej 0.264 ($\cong$ 25%). Zatem odpowiednia będzie inercja pierwszego rzędu z opóźnieniem.

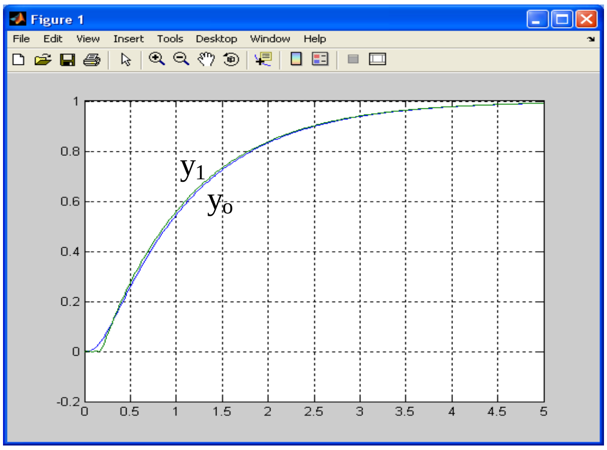
## 3. Inercja z opóźnieniem

- Wykorzystanie $t_{10}$ i $t_{90}$

  Matlab – [t' yo]
  wiersze – (0.28  0.1001)  $\rightarrow$ $t_{10}$=0.28
  (2.52  0.9007)  $\rightarrow$ $t_{90}$=2.52

$$T = \frac{2.52-0.28}{2.2} \cong 1,$$

$$\tau = 0.28 - 0.1 \cdot 1 \cong 0.18$$




- Aproksymacja

$$\frac{1}{s+1} e^{-0.18s}$$

- Matlab

```
[lp, mp] = pade(0.18, 8);
y1 = step(lp, conv(mp, [1 1]),t);
plot(t, yo,t,y1), grid
```

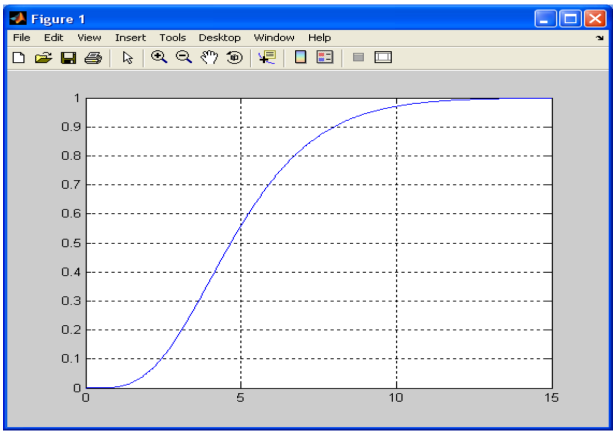
*Wniosek*. Za wyjątkiem samego początku aproksymacja wygląda korzystnie.

# APROKSYMACJE – PRZYKŁAD II

## 1. Obiekt

- Transmitancja $\dfrac{1}{(s+1)^5}$
- Matlab

```
l = 1; m = conv([1 1], [1 1]);
m= conv(m, m);
m = conv ([1 1], m); t = 0:0.05:15;
yo=step(l, m, t); plot(t, yo), grid
```



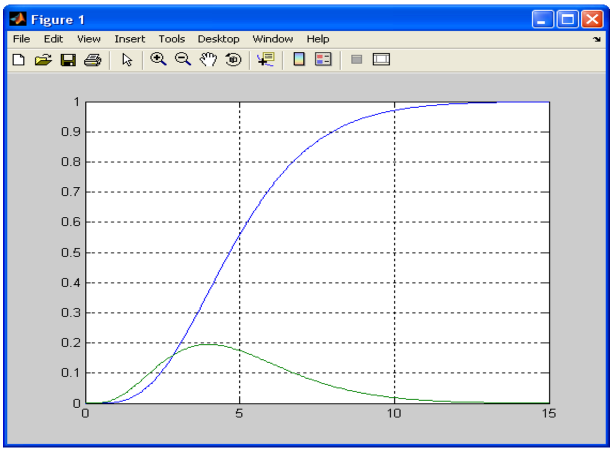
## 2. Punkt przegięcia

- Z powyższego przebiegu $y_o$ widać wprost, że punkt przegięcia leży powyżej 25% wartości ustalonej, więc odpowiednia jest inercja drugiego rzędu z opóźnieniem. Tym niemniej poniżej powtórzono wyznaczenie punktu przegięcia.

Matlab

```
size(yo)  →  301
dt=0.05;
for i=1:300;
  yop(i)=(yo(i+1)–yo(i))/dt;
end
yop(301)=yop(300);
plot(t, yo, t, yop), grid
[t'  yo  yop']
  …
4.0  0.3712  0.1953
  …
```

Punkt przegięcia – 37% (>25%)




## 3. Podwójna inercja z opóźnieniem

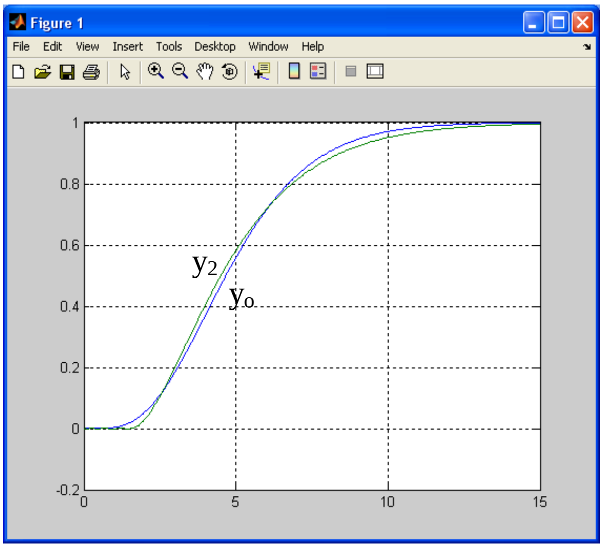
- [t' yo]
  (2.43  0.100)  →  $t_{10}$=2.43
  (8.00  0.900)  →  $t_{90}$=8.0

$$T=\frac{8.0-2.43}{3.3}=1.69,$$
$$\tau=2.43-0.53\cdot 1.69=1.53$$

- Aproksymacja

$$\frac{1}{(1.69s+1)^2}e^{-1.53s}$$

```
[lp, mp]=pade(1.53, 8);
m2=conv(conv([1.69  1], [1.86  1]), mp);
y2=step(lp, m2, t);
plot(t, yo, t, y2), grid
```




*Wniosek*. Krzywa $y_2$ zupełnie dobrze aproksymuje odpowiedź obiektu $y_o$.

*Uwaga*. Jeżeli plik tekstowy z zarejestrowaną odpowiedzią skokową obiektu $y_o$ liczy więcej niż kilkadziesiąt wierszy (max. 100), to przed wyznaczaniem pochodnej należy najpierw zredukować jego rozmiar uśredniając wartości $y_o$ metodą średniej bieżącej (np. średnia z kolejnych 10–ciu pomiarów, gdy plik ma rozmiar 500). Jest to szczególnie istotne, gdy na skutek zakłóceń pomiarowych przebieg $y_o$ nie jest gładki (jak wyżej), ale „postrzępiony”.