LINIE PIERWIASTKOWE EVANSA

PRz 2012

- **Idea metody**
  Definicja linii pierwiastkowych. Silnik sterowany napięciowo.

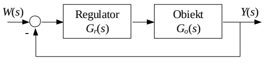
- **Zasady kreślenia linii pierwiastkowych**
  Alternatywne definicje. Wykorzystanie warunku fazy. Bieguny i zera.
  Linie na osi rzeczywistej. Punkty rozwidlenia/spotkania.
  Kąty wyjścia z biegunów wielokrotnych.

- **Wybór wzmocnienia na podstawie linii pierwiastkowych**
  Dane. Tok projektowania. Przeregulowanie a kąt nachylenia prostej.
  Punkt przecięcia prostej z linią pierwiastkową.
  Wzmocnienie dla punktu przecięcia.

- **Przykłady linii pierwiastkowych**
  Silnik sterowany prądowo. Cztery różne stałe czasowe.
  Określanie punktu rozwidlenia, czasu regulacji i wzmocnienia.

Idea metody

Aktualne zastosowanie metody linii pierwiastkowych:
– samostrojenie w regulatorach przemysłowych (automatyczne strojenie)

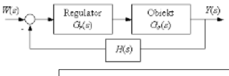


- Obiekt jest dany w formie transmitancji $G_o(s)$ jako stosunek dwóch wielomianów $\frac{L(s)}{M(s)}$

- W związku z tym opóźnienie $e^{-\tau s}$, o ile występuje, należy zastąpić rozwinięciem Pade'go (do projektowania wystarczy I rząd, a do sprawdzenia symulacyjnego wyższe rzędy)

- Transmitancję $G_o(s)$ otrzymuje się na podstawie modelu matematycznego lub na podstawie identyfikacji metodą odpowiedzi skokowej

Idea metody



$$G_r(s) = k_r G_r'(s),$$
$$G_o(s) = k_o G_o'(s)$$
$$H(s) = k_H H'(s)$$

Transmitancja układu otwartego $\boxed{G_{otw} = k_r k_o k_H G_r'(s) G_o'(s) H'(s) = kG(s) = k\frac{L(s)}{M(s)}}$ gdzie $k = k_r k_o k_H$

Transmitancja układu zamkniętego

$$G_{zam} = \frac{G_r G_o}{1+G_{otw}} = \frac{G_r G_o}{1+k\frac{L(s)}{M(s)}} = \frac{G_r G_o M(s)}{\underbrace{M(s)+kL(s)}}$$

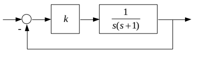
bieguny układu zamkniętego (mianownik decyduje o dynamice)

Pierwiastki wielomianu $M(s)+kL(s)$ (bieguny układu zamkniętego) określają charakter przebiegów przejściowych. Evans podał, jak sporządzić wykresy tych pierwiastków na płaszczyźnie zmiennej zespolonej dla $k \in (0,\infty)$ nie obliczając samych pierwiastków.

Definicja
Liniami pierwiastkowymi nazywamy zbiór pierwiastków mianownika transmitancji układu zamkniętego dla zmieniającego się *k*

Przykład

Silnik sterowany napięciowo:
- dla układu podanego na rysunku wykreślić linie pierwiastkowe
- przy jakim *k* przeregulowanie wyniesie 16.3%?
- kiedy przebiegi będą aperiodyczne krytyczne?



Wykres linii pierwiastkowych

$G_{otw} = k\frac{1}{s(s+1)}$ **gdzie** $G = \frac{1}{s(s+1)}$

$$G_{zam} = \frac{\frac{k}{s(s+1)}}{1+\frac{k}{s(s+1)}} = \frac{k}{s^2+s+k}$$

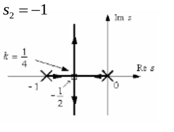
$\boxed{s_1(k),\quad s_2(k) = ?}$

$\Delta = 1-4k$

$k < \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \Delta > 0: \;\Rightarrow\; s_{1,2}(k) = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta(k)}}{2} \;\Rightarrow\; k = 0 \Rightarrow s_1 = 0, s_2 = -1$

$k = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \Delta = 0: \;\Rightarrow\; s_{1,2} = -\frac{1}{2}$

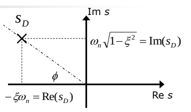
$k > \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \Delta < 0: \;\Rightarrow\; s_{1,2}(k) = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta(k)}}{2}$



Przykład

Dla jakich biegunów ukł. zamk. przeregulowanie wyniesie 16.3%

$$G_{zam}(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad s_{1,2}=-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

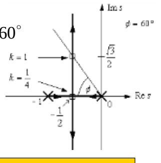


$$P_{\%}=e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\cdot 100\% \Rightarrow \xi=\frac{\left|\ln\frac{p_{\%}}{100}\right|}{\sqrt{\pi^2+\ln^2\frac{p_{\%}}{100}}}$$

$$p_{\%}=16.3\% \Rightarrow \xi=0.5$$

$$tg\phi=\frac{|\text{Im}|}{|\text{Re}|}=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \qquad \xi=0.5 \Rightarrow tg\phi=\sqrt{3} \Rightarrow \phi=60^\circ$$

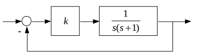
$$|\text{Im}|=|\text{Re}|\cdot tg\phi \Rightarrow \begin{cases}|\text{Re}|=\frac{1}{2}\\ |\text{Im}|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Rightarrow \boxed{s_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



Przeregulowanie jednoznacznie określa biegun układu zamkniętego na liniach pierwiastkowych

Przykład

Dla jakiego *k* przeregulowanie wyniesie 16.3%



Inaczej: dla jakiego *k* bieguny układu zamkniętego wyniosą: $s_1=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$, $s_2=-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$H(s)=1 \Rightarrow G_{zam}=\frac{G_{otw}}{1+G_{otw}}=\frac{kG(s)}{1+kG(s)}$$

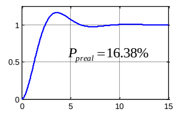
$$G_{zam}=\frac{G_{otw}}{1+G_{otw}}=\frac{kG(s)}{1+kG(s)} \Rightarrow \boxed{1+kG(s)=0}$$ **- równanie spełnione na linii pierwiastkowej**

$$k=-\frac{1}{G(s)}\bigg|_{s=s_1} \Rightarrow k=-\frac{1}{\frac{1}{s(s+1)}}\Bigg|_{s=s_1}=-s(s+1)\big|_{s=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1$$

Ile wyniesie czas regulacji

$$t_r=\frac{4}{|\text{Re}\, s_{1,2}|}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$$

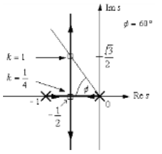
```
k=1;
L=k;
M=[1 1 k];
t=0:0.01:15;
y=step(L,M,t);
plot(t,y);grid
Ppreal=(max(y)-y(end))/y(end)*100
```



Przykład

Dla jakiego *k* uzyskuje się przebiegi aperiodyczne krytyczne

$$s_{1,2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow k=-\frac{1}{G(s)}\bigg|_{s=s_1}=-s(s+1)\big|_{s=-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

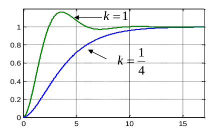


Ile wyniesie czas regulacji

$$t_r=\frac{6}{|\text{Re}\, s_{1,2}|}=\frac{6}{\frac{1}{2}}=12$$

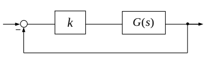
Gdy biegun dominujący jest podwójny rzeczywisty to czas regulacji równy jest 6-ciu stałym czasowym

```
k=1/4;
L=k;
M=[1 1 k];
t=0:0.01:15;
y=step(L,M,t);
plot(t,y);grid
```

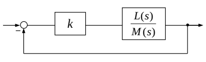


Przebiegi aperiodyczne krytyczne uzyskuje się wybierając bieguny układu zamkniętego tak, aby były one rzeczywiste i aby było jak najwięcej biegunów wielokrotnych

Równania linii pierwiastkowych



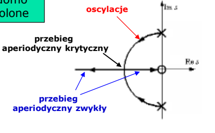
$$1+kG(s)=0 \Rightarrow k=-\frac{1}{G(s)}$$



$$1+k\frac{L(s)}{M(s)}=0 \Rightarrow k=-\frac{M(s)}{L(s)}$$

$$M(s)+kL(s)=0$$

Na podstawie linii pierwiastkowych można przewidzieć zachowanie układów nie symulując odpowiedzi skokowej, ponieważ wiadomo w jakim obszarze pierwiastki są rzeczywiste, a w jakim zespolone



Zasady kreślenia linii pierwiastkowych

Alternatywne definicje linii pierwiastkowych

- Linia pierwiastkowa jest zbiorem wartości s, które spełniają równanie

$$1+kG(s)=0 \quad \text{dla} \quad k\in(0,\infty)$$

- Linia pierwiastkowa jest zbiorem wartości s, dla których faza $G(s)$ wynosi

$$\boxed{\angle G(s)=\pm 180^\circ} \quad \text{(tzw. warunek fazy)}$$

Jeśli pewna liczba zespolona s jest tak szczęśliwie wybrana, że gdy policzymy fazę transmitancji układu otwartego dla tej liczby czyli $G(s)$ i otrzymamy ±180°, to znaczy, że trafiliśmy na pierwiastek leżący na linii pierwiastkowej

$$1+kG(s)=0 \quad \Rightarrow \quad G(s)=-\frac{1}{k}\Rightarrow |G(s)|e^{j\angle G(s)}=\frac{1}{k}e^{j\pm 180^\circ}$$ (k – liczba rzeczywista dodatnia)

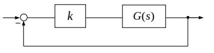
stąd $\angle G(s)=\pm 180^\circ$ dla s leżącego na linii pierwiastkowej

Wzór Eulera: $\boxed{e^{j\varphi}=\cos\varphi+j\sin\varphi}$

Przykład

Czy można dobrać takie k, aby G_{zam} miała biegun w punkcie $-1+j2$?

Inaczej, czy punkt $-1+j2$ leży na linii pierwiastkowej ?



$$G(s)=\frac{s+1}{s(s+5)[(s+2)^2+4]}$$

Zero: z = -1 ➡ o

Bieguny: $p=0,-5,-2\pm j2$ ➡ ×

Należy obliczyć $\angle G(s=-1+j2)$

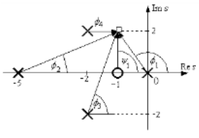
Jeśli kąt ten wyniesie ±180°, to oznacza, że uda się znaleźć k dające biegun G_{zam} w $s=-1+j2$

$$G(s=-1+j2)=\frac{-1+j2+1}{(-1+j2)(4+j2)[(1+j2)^2+4]}$$

$$\boxed{\angle G(s)=\underbrace{\sum\psi_i}_{\circ}-\underbrace{\sum\phi_i}_{\times}=\pm 180^\circ}$$

ψ_i – kąty wektorów wyprowadzonych z zer (o)

ϕ_i – wektorów wyprowadzonych z biegunów (×)



$\psi_1=90^\circ$

$\phi_1=180-arctg\,2=116.6^\circ$ $\qquad \phi_2=arctg\,\frac{2}{4}=26.6^\circ$

$\phi_3=arctg\,4=76^\circ$ $\qquad \phi_4=0^\circ$

$$\boxed{\angle G(s)=90-(116.6+26.6+76+0)=-129.2\neq\pm 180^\circ}$$

Zatem punkt $-1+j2$ ***nie leży*** na linii pierwiastkowej !

Matlab

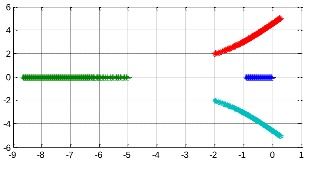
Warunek fazy - Matlab $\qquad G(s)=\dfrac{s+1}{s(s+5)[(s+2)^2+4]}$ $\qquad s=-1+j2$

```
s=-1+i*2
G=(s+1)/(s*(s+5)*((s+2)^2+4))
angle(G)*180/pi
```

➡ $\angle G(s)=-129.2^\circ$

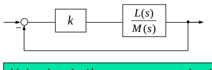
Wykreślanie linii pierwiastkowych - Matlab

```
L=[1 1]
M=conv([1 5 0],[1 4 8])
k=0:1:200;
r=rlocus(L,M,k);
plot(r,'*');grid
[k' r]
```



Zasady kreślenia linii pierwiastkowych

1. Bieguny i zera Wykreślić osie Re s, Im s zaznaczając bieguny × i zera o dla **układu otwartego**



M(s) = 0 - bieguny układu otwartego

L(s) = 0 – zera układu otwartego

Linie pierwiastkowe rozpoczynają się w biegunach układu otwartego a kończą w jego zerach, bądź dążą do nieskończoności

$\boxed{k\in(0,\infty)}$

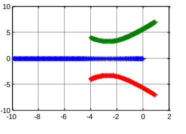
- dla $k=0$ linie się zaczynają ➡ $M(s)+kL(s)=0\big|_{k=0}\Rightarrow M(s)=0$
- dla $k\to\infty$ linie się kończą ➡ $\left.\dfrac{M(s)}{k}+L(s)=0\right|_{k\to\infty}\Rightarrow L(s)=0$

Układ III rzędu:

$$G(s)=\frac{1}{s[(s+4)^2+16]}$$

×: 0, $-4\pm j4$

o: nie ma



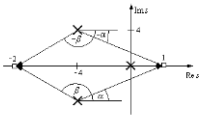
Zasady kreślenia linii pierwiastkowych

2. Linie na osi rzeczywistej

Punkt na osi rzeczywistej należy do linii pierwiastkowej, jeżeli sumaryczna liczba biegunów i zer rzeczywistych układu otwartego leżących na prawo od niego jest nieparzysta.

$$G(s) = \frac{1}{s[(s+4)^2+16]}$$

Czy punkty s=1 i s=-2 należą do linii pierwiastkowej ?



$$\sum \psi - \sum \phi = \pm 180°$$

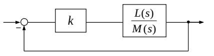
$$1: \quad 0-(-\alpha+\alpha+0) = 0 \neq \pm 180°$$

$$2: \quad 0-(-\beta+\beta \pm 180) = \pm 180°$$

Zatem punkt s=-2 leży na linii pierwiastkowej, a s=1 nie leży na linii pierwiastkowej

Zasady kreślenia linii pierwiastkowych

3. Asymptoty



n: ×, $m \leq n$: o

Linii pierwiastkowych jest n, z tego m kończy się w zerach układu otwartego. Pozostałe n-m zmierza do nieskończoności wzdłuż asymptot rozpoczynających się na osi rzeczywistej w punkcie

$$\sigma_a = \frac{\sum \overbrace{p_i}^{\times} - \sum \overbrace{z_j}^{\circ}}{n-m}$$, wykreślonych pod kątami $\phi_a = \frac{180° + l \cdot 360°}{n-m}$ dla $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$G(s) = \frac{1}{s[(s+4)^2+16]}$$

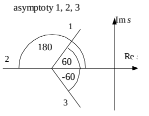
×: 0, $-4 \pm j4$

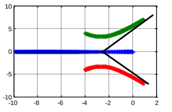
o: nie ma

$n = 3, \quad m = 0$ ➡ 3 asymptoty

$$\sigma_a = \frac{0-4+j4-4-j4}{3} = -\frac{8}{3} \cong -2.67$$

$$\phi_a = \frac{180° + l \cdot 360°}{3} \underset{0,+1,-1}{=} 60°, 180°, -60°$$

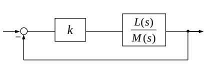




Zasady kreślenia linii pierwiastkowych

4. Przecięcie z osią urojoną

Punkt przecięcia linii pierwiastkowych z osią urojoną określa się podstawiając $s = j\omega$ do równania linii pierwiastkowych np. $M(s) + kL(s) = 0$ i rozwiązując je względem ω.



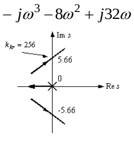
$$G(s) = \frac{1}{s[(s+4)^2+16]}$$

$M(s) = s[(s+4)^2+16] = s^3+8s^2+32s, \quad L(s) = 1$ ➡ $\boxed{s^3+8s^2+32s+k=0}$ rów. linii pierw.

$\boxed{s = j\omega:}$ $-j\omega^3 - 8\omega^2 + j32\omega + k = 0$

$\boxed{\mathrm{Im}=0}$ ➡ $\omega^3 - 32\omega = 0$ ➡ $\begin{cases} \omega_{kr} = \pm 4\sqrt{2} \cong \pm 5.66 \\ \omega = 0 \end{cases}$

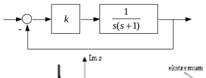
$\boxed{\mathrm{Re}=0}$ ➡ $-8\omega^2 + k = 0$ ➡ $k = 8 \cdot (4\sqrt{2})^2 = 256 = k_{kr}$



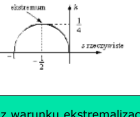
Hurwitz – granica stabilności: $8 \cdot 32 > 1 \cdot k \Rightarrow k < 256$

Zasady kreślenia linii pierwiastkowych

5. Punkty rozwidlenia/spotkania (*breakpoint*)



$$1 + kG(s) = 1 + k\frac{1}{s(s+1)} = 0$$ ➡ $k = -s(s+1)$



k – maksymalne (ekstremum)

Punkt rozwidlenia określa się z warunku ekstremalizacji czyli poszukiwania k_{max} a więc $\frac{dk}{ds} = 0$ ponieważ $k = -\frac{1}{G(s)}$ sprowadza się to do poszukiwania miejsc zerowych pochodnej

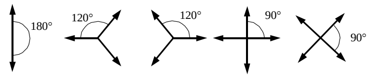
$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{G(s)}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{ds}G(s) = 0$$ (warunek konieczny)

Spośród otrzymanych rozwiązań tego równania należy wybrać to, które leży w dopuszczalnym przedziale na osi rzeczywistej

Zasady kreślenia linii pierwiastkowych

6. Kąty wyjścia z biegunów wielokrotnych (lub wejścia do zer)

Z podwójnego bieguna lub punktu rozwidlenia linie pierwiastkowe wychodzą pod kątami różniącymi się o $\frac{360°}{2} = 180°$, z potrójnego pod kątami różniącymi się o $\frac{360°}{3} = 120°$ z poczwórnego – o $\frac{360°}{4} = 90°$ itd.



Wykres linii pierwiastkowych

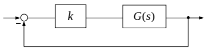
- „Ręczny" – wyznaczyć punkty charakterystyczne według zasad 1-6 wykreślić linie dokonując aproksymacji
- Matlab – funkcje *rlocus*() i *plot*()

Wybór wzmocnienia na podstawie linii pierwiastkowych

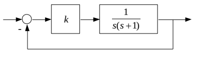
Wybór wzmocnienia jest podstawowym problemem projektowym

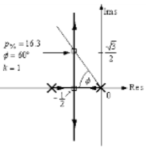
Dane: $G_{otw}(s) = k \cdot G(s), \quad p_{\%}$

Szukane: $\boxed{k}$



Przykład





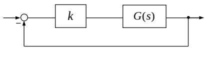
Tok projektowania

1. Określić kąt ϕ (stosunek Im*s*/Re*s* *bieguna*) na podstawie przeregulowania $p_{\%}$

$$\xi = \frac{\left|\ln \frac{p_{\%}}{100}\right|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \frac{p_{\%}}{100}}} \quad \Rightarrow \quad \phi = arctg\,\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

Wybór wzmocnienia na podstawie linii pierwiastkowych

2. Utworzyć linie pierwiastkowe dla $G(s)$



- „Ręcznie" – według zasad 1-6
- Matlab – r=*rlocus*(L,M,k); *plot*(r,'*')

3. Wyznaczyć punkt przecięcia s_D prostej ϕ z linią pierwiastkową i określić wzmocnienie *k*

- „Ręcznie" - s_D z wykresu (w przybliżeniu) ⇒ $k = -\frac{1}{G(s)}$ dla $s = s_D$
- Matlab - wybór kolumny r(:,i), w której Re<0, Im>0 (i = 1,2,3,.....)

[k' r(:,i) 180-angle(r(:,i))*180/pi] - tablica 3-kolumnowa

- wybór wiersza z wartością kąta najbliższą ϕ tzn. wiersza

[k s_D $\cong \phi$] - zgodność kąta

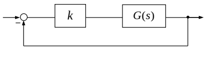
Wybór wzmocnienia na podstawie linii pierwiastkowych

4. Określić spodziewany czas regulacji

$$t_r = \frac{4}{|\mathrm{Re}\, s|} \quad \text{dla} \quad s = s_D$$

5. Kontrola odpowiedzi skokowej układu zamkniętego – Matlab

Przykład $\quad G(s) = k\frac{1}{s[(s+4)^2+16]} \qquad p_{\%} = 16.3\%$



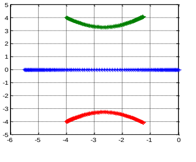
$p_{\%} = 16.3\% \;\Rightarrow\; \xi = 0.5 \;\Rightarrow\; \phi = 60°$

```
L=1;
M=conv([1 0],[1 8 32]);
k=0:1:100;
r=rlocus(L,M,k);
plot(r,'*');grid
```

r ⇒

0	-4.0000 + 4.0000i	-4.0000 - 4.0000i
-0.0315	-3.9843 + 3.9843i	-3.9843 - 3.9843i
-0.0635	-3.9682 + 3.9685i	-3.9682 - 3.9685i
-0.0960	-3.9520 + 3.9526i	-3.9520 - 3.9526i
-0.1291	-3.9355 + 3.9365i	-3.9355 - 3.9365i

[k' r(:,2) 180-angle(r(:,2))*180/pi]



Wybór wzmocnienia na podstawie linii pierwiastkowych

[k` r(:,2) 180-angle(r(:,2))*180/pi]

62.00	-2.06 + 3.43i	58.95
63.00	-2.03 + 3.45i	59.48
64.00	-2.00 + 3.46i	60.00
65.00	-1.97 + 3.48i	60.51
66.00	-1.94 + 3.50i	61.01
67.00	-1.91 + 3.52i	61.50

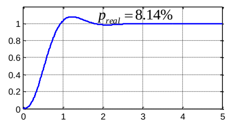
$k = 64$

$s_{\mathbf{D}}$ =-2.00+3.46i

$Re(s_{\mathbf{D}})$ =-2.00

$$t_r = \frac{4}{|-2|} = 2$$

```
L=1;
M=conv([1 0],[1 8 32]);
k=64
Lz=k*L;
Mz=M+[0 0 0 k*L];
t=0:0.01:5;
y=step(Lz,Mz,t);
plot(t,y);grid
Preal=(max(y)-y(end))/y(end)*100
```

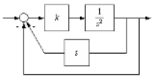


Nie należy oczekiwać, że otrzymane przeregulowanie będzie wynosić dokładnie 16.3%, ponieważ układ jest III rzędu. Na ogół jednak rozbieżności nie są nadmierne. Ewentualne zbliżenie się do zadanych wymagań jest możliwe metodą kolejnych prób (korygowanie wzmocnienia)

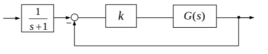
Przykłady linii pierwiastkowych

Silnik sterowany prądowo ze sprzężeniem pozycyjnym i tachometrycznym oraz sterownikami mocy o różnych stałych czasowych. Wymagane są przebiegi aperiodyczne krytyczne.

Sterownik idealny - $T = 0$



$k = ?$

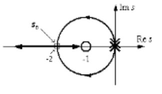


$$G_{otw}(s) = k\frac{s+1}{s^2} \qquad G(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

Bieguny: $p_{1,2} = 0$ Zero: $z_1 = -1$

Punkt rozwidlenia

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2}{s+1}\right) = 0 \Rightarrow (s+1)\cdot 2s - s^2\cdot 1 = 0 \Rightarrow s^2 + 2s = 0 \Rightarrow \boxed{s = 0, -2}$$



W układzie 2-go rzędu mającego jedno zero jest ono środkiem okręgu będącego linią pierwiastkową

Przykłady linii pierwiastkowych

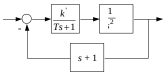
Wzmocnienie dla $s_{\mathbf{D}} = -2$

$$k = -\frac{1}{G(s)} = -\left.\frac{s^2}{s+1}\right|_{-2} = 4$$

Czas regulacji

$$t_r = \frac{4}{|\mathrm{Re}\, s_D|} = \frac{4}{2} = 2$$

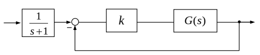
Sterownik o znacznej stałej czasowej – $T = 0.25$



$$G_{otw}(s) = k'\frac{s+1}{s^2(Ts+1)} = \frac{k'}{T}\frac{s+1}{s^2\left(s+\frac{1}{T}\right)} = k\frac{s+1}{s^2(s+p)}$$

$$k = \frac{k'}{T} = \frac{k'}{0.25} = 4k' \qquad p = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.25} = 4$$

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+4)}$$



Bieguny: $p_{1,2} = 0, \quad p_3 = -4$ Zero: $z_1 = -1$

Przykłady linii pierwiastkowych

Asymptoty $G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+4)}$ Bieguny: $p_{1,2} = 0, \quad p_3 = -4$ Zero: $z_1 = -1$

$$\sigma_a = \frac{\sum \overbrace{p_i}^{\times} - \sum \overbrace{z_j}^{\circ}}{n-m}$$

$$\phi_a = \frac{180° + l\cdot 360°}{n-m}$$

$$\sigma_a = \frac{-4-(-1)}{3-1} = -1.5 \qquad \phi_a = \frac{180 + l\cdot 360}{3-1} \underset{l=0,1}{=} 90°,\ 270°$$

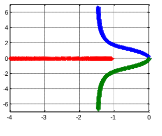
Punkt rozwidlenia

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2(s+4)}{s+1}\right) = 0 \Rightarrow s^2(s+4)\cdot 1 - (s+1)(3s^2+8s) = 0 \Rightarrow s(2s^2+7s+8) = 0$$

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_{2,3} = -1.75 \pm j0.986 \end{cases}$$

Nie istnieje punkt rozwidlenia na osi rzeczywistej
Nie uda się więc uzyskać przebiegów aperiodycznych krytycznych

```
L=[1 1]
M=[1 4 0 0]
k=0:0.1:50;
r=rlocus(L,M,k);
plot(r,'*'),grid
```



Sterownik o znacznej stałej czasowej (tani, przeciętna jakość) nie jest w stanie zapewnić wymagań projektowych

Przykłady linii pierwiastkowych

Sterownik o małej stałej czasowej - $T = 0.0833 = \frac{1}{12}$

$k = \frac{k'}{0.0833} = 12k'$ $\quad p = \frac{1}{0.0833} = 12 \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+12)}$

$p_3 = -12$

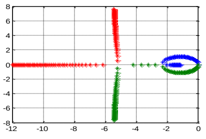
$\sigma_a = \frac{-12-(-1)}{3-1} = -5.5$

$\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2(s+12)}{s+1}\right) = 0 \Rightarrow s(2s^2 + 15s + 24) = 0 \Rightarrow$ roots([2 15 24])

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -2.31 \\ s_3 = -5.81 \end{cases}$$

Istnieją zatem dwa punkty rozwidlenia

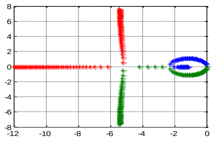
```
L=[1 1]
M=conv([1 0 0],[1 12])
k=0:1:100;
r=rlocus(L,M,k);
plot(r,'*'),grid
```



Przykłady linii pierwiastkowych

Wzmocnienia dla punktów rozwidlenia

$k_1 = -\frac{s^2(s+12)}{s+1}\bigg|_{-2.31} = 39.47 \qquad k_2 = -\frac{s^2(s+12)}{s+1}\bigg|_{-5.18} = 43.78$



Dla $k \in (39.47, 43.78)$ przebiegi dynamiczne będą aperiodyczne

Sterownik o małej stałej czasowej (kosztowny, dobra jakość) zapewni wymagania projektowe

Wartości k_1, k_2 można także otrzymać na podstawie instrukcji

```
[k'   r(:,2)   180-angle(r(:,2))*180/pi ]
```

Przykłady linii pierwiastkowych

Sterownik o średniej stałej czasowej - $T = 0.111 = \frac{1}{9}$

$$\sigma_a = \frac{\sum \overbrace{p_i}^{\times} - \sum \overbrace{z_j}^{\circ}}{n-m}$$

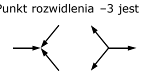
$$\phi_a = \frac{180^\circ + l \cdot 360^\circ}{n-m}$$

$k = 9k' \quad p = 9 \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+9)}$

$p_3 = -9 \qquad \sigma_a = \frac{-9-(-1)}{3-1} = -4.5$

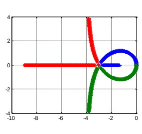
$\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2(s+9)}{s+1}\right) = 0 \Rightarrow s(s^2 + 6s + 9) = s(s+3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_{2,3} = -3 \end{cases}$

Punkt rozwidlenia –3 jest podwójny (linie się schodzą i rozchodzą**)**

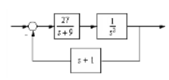


$k = -\frac{s^2(s+9)}{s+1}\bigg|_{-3} = 27 \qquad t_r = \frac{4}{3} = 1.33$

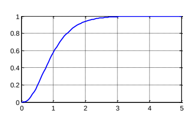
```
L=[1 1]
M=conv([1 0 0],[1 9])
k=0:0.01:40;
r=rlocus(L,M,k);
plot(r,'*'),grid
```



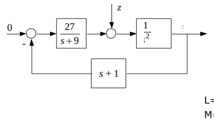
Przykłady linii pierwiastkowych




```
L=27*[0 0 1 1]
M=[1 9 0 0]
t=0:0.05:5;
y=step(27,L+M,t);
plot(t,y);grid
```

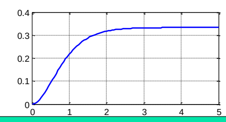


Odpowiedź na zakłócenie



$$\frac{Y_z(s)}{Z(s)} = \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{1}{s^2} \cdot \frac{27}{s+9}(s+1)} = \frac{s+9}{s^2(s+9) + 27(s+1)} = \frac{s+9}{\underbrace{s^3 + 9s^2 + 27s + 27}_{l+m}}$$

```
L=[1 9]
M=[1 9 27 27]
t=0:0.05:5;
y=step(L,M,t);
plot(t,y);grid
```



Powodem niepełnej eliminacji zakłócenia jest brak całkowania w regulatorze, którym tutaj jest $27\frac{s+1}{s+9}$