Automatyka i systemy dynamiczne

<u>Dynamika układów II rzędu</u>

Zadania

PRZYKŁADY

1. Pierwiastki jednokrotne

   Wyznaczyć oryginał $f(t)$ następującej transformaty Laplace'a

   $$F(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+2)(s+5)}$$

   Rozwiązanie

- $F(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+2)(s+5)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3}{s+5}$

  $$R_1 = s \cdot F(s)|_{s=0} = \left.\frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)}\right|_{s=0} = \frac{10}{2\cdot 5} = 1$$

  $$R_2 = (s+2) \cdot F(s)|_{s=-2} = \left.\frac{10(s+1)}{s(s+5)}\right|_{s=-2} = \frac{10\cdot(-2+1)}{(-2)\cdot(-2+5)} = \frac{5}{3}$$

  $$R_3 = (s+5) \cdot F(s)|_{s=-5} = \left.\frac{10(s+1)}{s(s+2)}\right|_{s=-5} = \frac{10\cdot(-5+1)}{(-5)\cdot(-5+2)} = -\frac{8}{3}$$

  $$f(t) = 1 + \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{8}{3}e^{-5t}$$

- Matlab

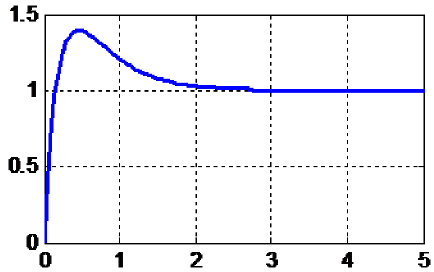
```
L=10*[1 1];                   − 10(s + 1)
M=conv([1 2 0],[1 5]);        − s(s + 2) ⇒ [1 2 0],   s + 5 ⇒ [1 5]
[R,p,k]=residue(L,M)

    -2.6667          -5
R =  1.6667     p =  -2        k =  [ ]
     1.0000           0
```

  $$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{\underset{\frac{5}{3}}{\uparrow}1.6667}{s+2} + \frac{\underset{-\frac{8}{3}}{\uparrow}-2.6667}{s+5}, \quad T_{max} = \frac{1}{2} \text{ – większa stała czasowa}$$

  Uwaga. Przedział czasu dla wykreślenia $f(t)$ powinien wynosić 5 do 10 dominujących stałych czasowych (największych).

Większą stałą czasową jest tutaj $\frac{1}{2}$, więc jako przedział czasu można przyjąć $10 \cdot \frac{1}{2} = 5$.

```
t=0:0.05:5;
f=impulse(L,M,t);
plot(t,f);grid
max(f)    1.3966
```



cztery stałe czasowe

Typowy wykres składa się z ok.100 wartości (od 50 do 200).

Lub

```
f=step([L o], M, t);
plot(t, f), grid
```

Porównanie

```
ft=1+5/3*exp(-2*t)-8/3*exp(-5*t);
plot(t, f, t, ft), grid
```

Wykresy pokrywają się.

deg L = deg M

W przypadku, gdy stopnie (*deg*) licznika *L* i mianownika *M* transformaty *F*(*s*) są jednakowe, wartość *k* zwracana przez funkcję `residue()` jest wynikiem dzielenia *L*/*M*, tzn.

$$\frac{b_n s^n + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0} = k + \underbrace{\frac{c_{n-1} s^{n-1} + \cdots + c_0}{a_n s^n + \cdots + a_0}}_{R,\, p}$$

2. Pierwiastki wielokrotne

Wyznaczyć transformatę odwrotną

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+3)^3 (s+1)}, \qquad f(t) = ?$$

Rozwiązanie

- $F(s) = \frac{s+2}{(s+3)^3(s+1)} = \frac{R_1}{s+3} + \frac{R_2}{(s+3)^2} + \frac{R_3}{(s+3)^3} + \frac{R}{s+1}$

$$R_3 = \underbrace{(s+3)^3 F(s)}_{\alpha_1}\Big|_{s=-3} = \frac{s+2}{\underbrace{s+1}_{\alpha_1}}\Bigg|_{s=-3} = \frac{1}{2}$$

$$R_2 = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\underbrace{\left(\frac{s+2}{s+1}\right)}_{\alpha_1}\Bigg|_{s=-3} = \frac{(s+1)-(s+2)}{(s+1)^2}\Bigg|_{s=-3} = \frac{-1}{\underbrace{(s+1)^2}_{\alpha_2}}\Bigg|_{s=-3} = -\frac{1}{4}$$

$$R_1 = \frac{1}{2!}\frac{d}{ds}\underbrace{\left(\frac{-1}{(s+1)^2}\right)}_{\alpha_2}\Bigg|_{s=-3} = \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^3}\Big|_{s=-3} = -\frac{1}{8}$$

$$R = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \frac{s+2}{(s+3)^3}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{8}$$

$$f(t) = \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{8}e^{-3t} - \frac{1}{4}te^{-3t} + \frac{1}{4}t^2e^{-3t} = \frac{1}{8}e^{-t} + e^{-3t}\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}t^2\right)$$

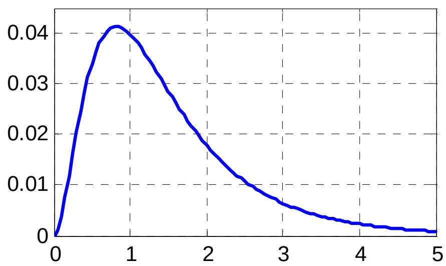
- Matlab

```
L=[1 2];M=conv([1 6 9],[1 3]);M=conv(M,[1 1]);
[R,p,k]=residue(L,M)
```

```
        -0.125  (R1)           -3.0
    R = -0.25   (R2)       p = -3.0       k = [ ]
         0.5    (R3)           -3.0
         0.125  (R)            -1.0
```

Dominującą stałą czasową jest 1. Wykres może obejmować np. pięć dominujących stałych czasowych.

```
t=0:0.05:5;
f=impulse(L,M,t);
plot(t,f);grid
max(f)     0.0412
```



Porównanie (mnożenie/dzielenie „z kropką” ze względu na wektory)

```
ft=1/8*exp(-t)+exp(-3*t).*(-1/8-1/4*t+1/4*t.*t);
plot(t, f, t, ft), grid
```

3. Pierwiastki zespolone

Rozwiązać równanie

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = u, \quad u = 1(t), \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0$$

Rozwiązanie

- $s^2X(s) - 2sX(s) + 5X(s) = \frac{1}{s}$, $\quad X(s) = \frac{1}{s(s^2-2s+5)}$

  $\Delta = 4 - 20 = -16$, $\quad \sqrt{\Delta} = j4$, $\quad s_{1,2} = 1 \pm j2$, $\quad \sigma = 1$, $\quad \omega = 2$

- S, C obliczane bezpośrednio

$X(s) = \frac{1}{s(s^2-2s+5)} = \frac{1}{s[(s-1)^2+2^2]} = \frac{R}{s} + \frac{C(s-1)+2S}{(s-1)^2+2^2}$

$R = s \cdot X(s)|_{s=0} = \left.\frac{1}{(s^2-2s+5)}\right|_{s=0} = \frac{1}{5}$

$S + jC = \frac{1}{\omega}[(s-\sigma)^2 + \omega^2] \cdot F(s)|_{s=\sigma+j\omega} = \frac{1}{2}[(s-1)^2 + 2^2]$

$\left.\frac{1}{s(s^2-2s+5)}\right|_{s=1+j2} = \left.\frac{1}{2s}\right|_{s=1+j2} = \frac{1}{10} - j\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{10}, \quad C = -\frac{1}{5}$

$x(t) = \frac{1}{5} + e^t\left(\frac{1}{10}\sin 2t - \frac{1}{5}\cos 2t\right)$

$\sqrt{S^2 + C^2} = \sqrt{\frac{1}{20}}, \quad \mathrm{tg}\,\phi = \frac{C}{S} = -2$

$\phi = -arctg2 = -1.107_{rd} = -1.107 \cdot \frac{180}{\pi}{}_{deg}$

$x(t) = \frac{1}{5} + \frac{1}{\sqrt{20}} e^t \sin(2t - 1.107_{rd})$

- Rezidua standardowe

$X(s) = \frac{1}{s(s^2-2s+5)} = \frac{1}{s[s-(1+j2)][s-(1-j2)]} = \frac{R}{s} + \frac{A+jB}{s-(1+j2)} + \frac{A-jB}{s-(1-j2)}$

$A + jB = [s-(1+j2)] \cdot X(s)|_{s=1+j2} = \left.\frac{1}{s[s-(1-j2)]}\right|_{s=1+j2} =$

$= \frac{1}{(1+j2)(1+j2-1+j2)} = \frac{1}{(1+j2)(j4)} = \frac{1}{j4-8} = \frac{j4+8}{-16-64} = \frac{j4+8}{-80} =$

$= -\frac{1}{10} - j\frac{1}{20} = A + jB \Rightarrow A = -\frac{1}{10}, \quad B = -\frac{1}{20}$

Związek między *A*, *B*, a *S*, *C* wyrażają wzory

$S = -2B, \quad C = 2A$

Zatem $S = -2B = \frac{1}{10}, \quad C = 2A = -\frac{1}{5}$ – zobacz więcej

- Matlab

```
s=1+sqrt(-1)*2
1/(2*s)
```

S*+*jC

```
0.1000 - 0.2000i
```

```
[R,p,k]=residue(1,[1 -2 5 0])
```

A*+j*B	***σ*+j*ω***	
R = 0.1 - 0.05i ; -0.1 + 0.05i ; 0.2	p = 1 + 2i ; 1 – 2i ; 0	k = [ ]

```
   0.1 -
 0.05i
R = -0.1 +
 0.05i
     0.2
```

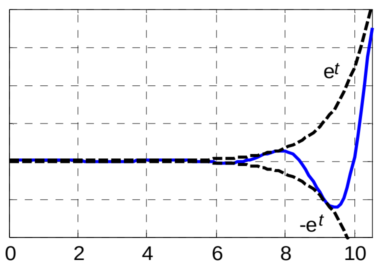
```
    1 + 2i
p = 1 – 2i
        0
```

```
k = [ ]
```

Ponieważ $\omega = 2$, więc okresem sinusoidy jest $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$. Przedział czasu dla wykresu obejmującego trzy okresy wynosi około 10.5.

Zatem

```
t=0:0.1:10.5;      ok. 3 okresy
x=impulse(1,[1 -2 5 0],t);
plot(t,x);grid
```



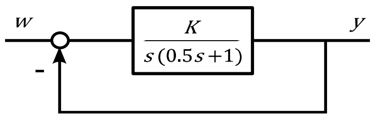
Przebieg $x(t)$ reprezentuje narastające oscylacje (układ sterowania zachowujący się w ten sposób jest nazywany niestabilnym).

Porównanie

```
xt=1/5+1/sqrt(20)*exp(t).*sin(2*t-1.107);
plot(t, x, t, xt), grid
```

4. Projektowanie

Układ sterowania ma postać jak na rysunku.



a) Czy można jednocześnie uzyskać przeregulowanie 10% i czas regulacji mniejszy niż 1 sekunda?
b) Jeżeli nie, to podaj wartość K, która czyni zadość pierwszemu warunkowi (10%). Jaki będzie teraz czas regulacji? W jakim momencie wystąpi przeregulowanie?

Rozwiązanie

a) $$p_{\%} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}100 \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{\left|\ln\frac{p_{\%}}{100}\right|}{\sqrt{\pi^2+\ln^2\frac{p_{\%}}{100}}} = 0.59$$

$$G_{zam}(s) = \frac{\frac{K}{s(0.5s+1)}}{1+\frac{K}{s(0.5s+1)}} = \frac{K}{s(0.5s+1)+K} = \frac{K}{0.5s^2+s+K} = \frac{2K}{s^2+2s+2K}$$

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = 2 \\ \omega_n^2 = 2K \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{1}{\xi} = \frac{1}{0.59} \cong 1.7$$ – wymaganie pochodzące od $p_{\%} = 10$

$$t_r = \frac{4}{\xi\omega_n} < 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_n > \frac{4}{\xi} = 6.7$$ – wymaganie pochodzące od $t_r < 1$ i $p_{\%} = 10$

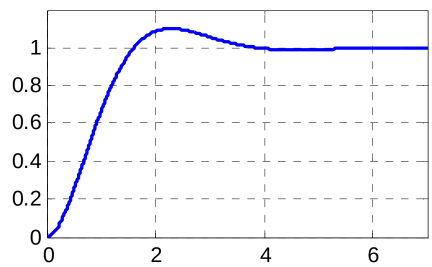
Nie można jednocześnie uzyskać $p_{\%} = 10$ oraz $t_r < 1$.

b) $$\omega_n = 1.7 \text{ i } \omega_n^2 = 2K \quad \Rightarrow \quad 2K = 1.7^2 \quad \Rightarrow \quad K = 1.44$$

$$t_r = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{0.59\cdot 1.7} \cong 4, \quad t_1 = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \cong 2.29$$

- Matlab

```
L=2*1.44;
M=[1 2 2*1.44];
t=0:0.01:7;
y=step(L,M,t);
plot(t,y);grid
```



ZADANIA DOMOWE

Dynamika

1. $F(s) = \frac{1-s}{s(s+1)^2}$, $f(t) = ?$ *Odp.*: $f(t) = 1 - (1+2t)e^{-t}$,

2. $F(s) = \frac{3(s+2)}{s^3(s+1)}$, $f(t) = ?$ *Odp.*: $f(t) = 3(1 - t + t^2 - e^{-t})$

3. $F(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+2)(s+5)}$, $f(t) = ?$ *Odp.*: $f(t) = 1 + \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{8}{3}e^{-5t}$

4. $F(s) = \frac{36(s+1)}{s(s+2)^2(s+3)}$, $f(t) = ?$ *Odp.*: $f(t) = 3[1 + 8e^{-3t} + e^{-2t}(6t - 9)]$

5. $F(s) = \frac{s+4}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$, $f(t) = ?$ *Odp.*: $f(t) = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}e^{-t} + e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$

6. $F(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{s(s+3)(s-4)}$, $f(t) = ?$ *Odp.*: $f(t) = \frac{1}{12} + \frac{8}{21}e^{-3t} + \frac{15}{28}e^{4t}$

7. $F(s) = \frac{5(s^2+s+4)}{(s+2)(s^2+4s+13)}$, $f(t) = ?$

Odp.: $f(t) = \frac{10}{3}e^{-2t} + e^{-2t}\left(\frac{5}{3}\cos 3t 5 \sin 3t\right) = \; = e^{-2t}\left[\frac{10}{3} - \frac{5\sqrt{10}}{3}\sin\left(3t - \mathrm{arctg}\frac{1}{3}\right)\right]$

8. $\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = u$, $u = 1(t)$, $y_0 = \dot{y}_0 = 0$, $y(t) = ?$

Odp.: $y(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}$

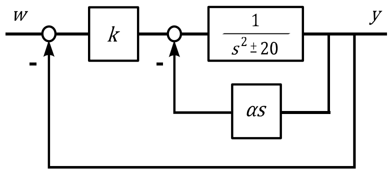
9. $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u$, $u = 1(t)$, $y_0 = \dot{y}_0 = 0$, $y(t) = ?$

Odp.: $y(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$

10. $\ddot{y} + \dot{y} + y = u$, $u = 1(t)$, $y_0 = \dot{y}_0 = 0$, $y(t) = ?$

Odp.: $y(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] = 1 - e^{-\frac{1}{2}t}\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \mathrm{arctg}\sqrt{3}\right)$

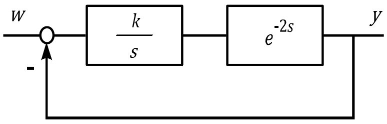
Projektowanie – *p%, tr*



1. Dla układu sterowania ramieniem robota skierowanym najpierw w dół, a potem w górę, dobrać nastawy k, α tak, aby uzyskać przebiegi aperiodyczne krytyczne ($p_{\%} = 0 \Rightarrow \xi = 1$) z czasem regulacji 0.5 sekundy.

Odp.: $G_1(s) = \frac{1}{s^2+20} \quad \Rightarrow \quad k = 44, \quad \alpha = 16$

$G_2(s) = \frac{1}{s^2-20} \quad \Rightarrow \quad k = 84, \quad \alpha = 16$

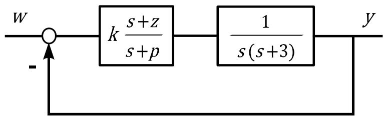


2. Dobrać wzmocnienie k regulatora całkującego, który sterując obiektem e^{-2s} („czysto" opóźniającym) zapewni przeregulowanie 4.3%. Jakiego czasu regulacji można się spodziewać? Jak wygląda odpowiedź skokowa?

Wskazówki. Projektowanie: $e^{-\tau s} \cong \frac{-\frac{\tau}{2}s+1}{\frac{\tau}{2}s+1}$ (Padé – rząd 1)

Symulacja: aproksymacja Padé – rząd 8..10.

Odp.: $k = 0.268, \quad t_r = 10.94$



3. W układzie regulacji zero regulatora z dobiera się eliminując biegun obiektu (czyli 3). Wyznaczyć k, p tak, aby przeregulowanie wynosiło 5%, a czas regulacji $\frac{4}{3}$ sekundy.

Odp.: $z = 3, \quad k = 18.9, \quad p = 6$