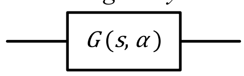
3. WRAŻLIWOŚĆ I BŁĄD USTALONY

Podstawowe wzory

Wrażliwość

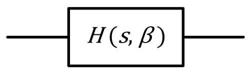
- Wrażliwość transmitancji względem parametru

$$S_\alpha = \frac{\alpha}{G}\frac{\partial G}{\partial \alpha} \tag{3.1a}$$



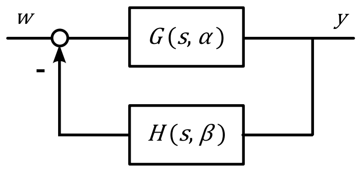
$\alpha,\ \beta$ – parametry nominalne

$$S_\beta = \frac{\beta}{H}\frac{\partial H}{\partial \beta} \tag{3.1b}$$



- Wrażliwość układu zamkniętego

$$S_\alpha^{zam} = \frac{1}{1+GH} S_\alpha \tag{3.2a}$$



$$S_\beta^{zam} = -\frac{GH}{1+GH} S_\beta \tag{3.2b}$$

Uwaga. Dla $|GH| \gg 1 \quad \Rightarrow \quad S_\alpha^{zam} \cong 0, \quad S_\beta^{zam} \cong -S_\beta$

- Zmiana odpowiedzi układu (transformacja Laplace'a)

$$\Delta Y_\alpha = S_\alpha^{zam} G_{zam} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} W, \qquad \Delta\alpha,\ \Delta\beta \text{ - zmiany parametrów} \tag{3.3a}$$

$$\Delta Y_\beta = S_\beta^{zam} G_{zam} \frac{\Delta\beta}{\beta} W, \qquad G_{zam} = \frac{G}{1+GH} \tag{3.3b}$$

Błąd ustalony

- Wzór ogólny

$$e_u = e(t \to \infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+GH} sW(s) \tag{3.4a}$$

- Stałe błędu

$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s)$ – stała pozycyjna

$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s)$ – stała prędkościowa (3.4b)

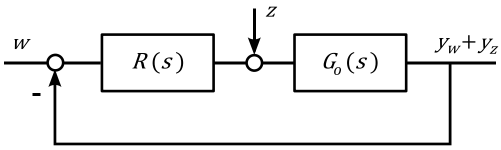
$K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s)H(s)$ – stała przyspieszeniowa

- Błędy ustalone, a stałe błędu dla standardowych wymuszeń

Wielkość zadana	$\boldsymbol{w(t)}$	$\boldsymbol{e_u}$
stała 	$1(t)$	$\frac{1}{1+K_p}$
liniowa 	$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{K_v}$
paraboliczna 	$\frac{t^2}{2} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{K_a}$

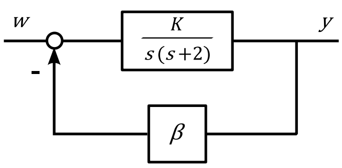
Uwaga. Jeżeli $w(t)$ ma amplitudę *A*, wtedy wzory na e_u należy pomnożyć przez *A*. Na przykład dla $w(t) = A \cdot t \cdot 1(t)$ mamy $e_u = \frac{1}{K_v}A$.

- Ustalona odpowiedź na zakłócenie



$$y_{zu} = y_z(t \to \infty) = \lim_{s\to 0} sY_z(s) = \lim_{s\to 0} \frac{G_O(s)}{1+R(s)G_O(s)} sZ(s) \qquad (3.5)$$

Przykłady



Z 3.1. W pokazanym obok układzie regulacji o nominalnych wartościach parametrów $K = 2$, $\beta = 1$, wzmocnienie K toru głównego uległo zmianie o 10%, a współczynnik β charakteryzujący przetwornik pomiarowy o 1%. Jakie ustalone zmiany *y* dla $w(t) = 1(t)$ to spowodowało?

Rozwiązanie

- $G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$, $H(s,\beta) = \beta$, $K = 2$, $\beta = 1$

  $\frac{\Delta K}{K} = 0.1\ \ (10\%)$, $\frac{\Delta\beta}{\beta} = 0.01\ \ (1\%)$

- $S_K = \frac{K}{G}\frac{\partial G}{\partial K} = \frac{2}{\frac{2}{s(s+2)}} \cdot \frac{1}{s(s+2)} = 1$

  $$S_K^{zam} = \frac{1}{1+GH}\, S_K = \frac{1}{1+\frac{K}{s(s+2)}\cdot\beta}\, S_K = \frac{1}{1+\frac{2}{s(s+2)}\cdot 1}\cdot 1 = \frac{s(s+2)}{s(s+2)+2}$$

  $$G_{zam} = \frac{G}{1+GH} = \frac{\frac{K}{s(s+2)}}{1+\frac{K\beta}{s(s+2)}} = \frac{K}{s(s+2)+K\beta} = \frac{2}{s(s+2)+2}$$

  $$\Delta Y_K(s) = S_K^{zam}\, G_{zam}\, \frac{\Delta K}{K}\, W(s), \qquad W(s) = \frac{1}{s}$$

  $$\Delta y_K(t\to\infty) = \lim_{s\to 0} s\Delta Y_K(s) = \lim_{s\to 0} S_K^{zam}\, G_{zam}\, \frac{\Delta K}{K} =$$

  $$= \lim_{s\to 0} \frac{s(s+2)}{s(s+2)+2}\cdot\frac{2}{s(s+2)+2}\cdot 0.1 = 0$$

- $S_\beta = \frac{\beta}{H}\frac{\partial H}{\partial\beta} = \frac{\beta}{\beta}\cdot 1 = 1$

  $$S_\beta^{zam} = \frac{-GH}{1+GH}\, S_\beta = \frac{-\frac{K}{s(s+2)}\cdot\beta}{1+\frac{K}{s(s+2)}\cdot\beta}\, S_\beta = \frac{-K\cdot\beta}{s(s+2)+K\beta}\, S_\beta = \frac{-2}{s(s+2)+2}$$

  $$\Delta Y_\beta(s) = S_\beta^{zam}\, G_{zam}\, \frac{\Delta\beta}{\beta}\, W(s)$$

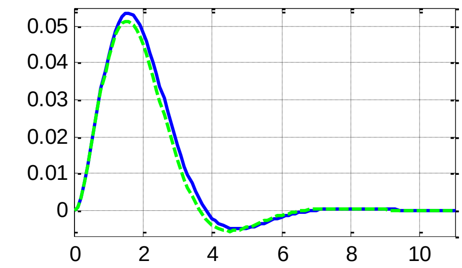
  $$\Delta y_\beta(t\to\infty) = \lim_{s\to 0} s\Delta Y_\beta(s) = \lim_{s\to 0} S_\beta^{zam}\, G_{zam}\, \frac{\Delta\beta}{\beta} =$$

  $$= \lim_{s\to 0} \frac{-2}{s(s+2)+2}\cdot\frac{2}{s(s+2)+2}\cdot 0.01 = -0.01\ \ (1\%)$$

- Matlab

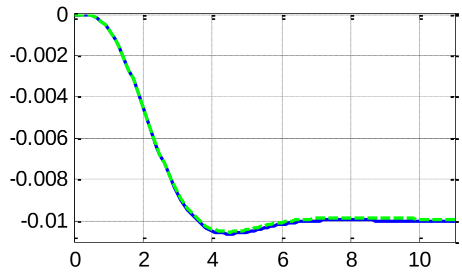
Wykres $\Delta y_K(t)$

```
Lk=0.2*[1 2 0];
Mk=conv([1 2 2],[1 2 2]);
t=0:0.1:11;
dy=step(Lk,Mk,t);
plot(t,dy);grid
```



Wykres $\Delta y_\beta(t)$

```
Lbeta=-0.04;
Mbeta=conv([1 2 2],
           [1 2 2]);
t=0:0.1:11;
dy=step(Lbeta,Mbeta,t);
plot(t,dy);grid
```

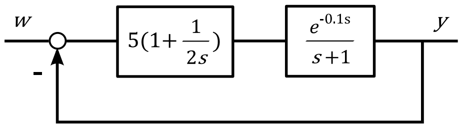


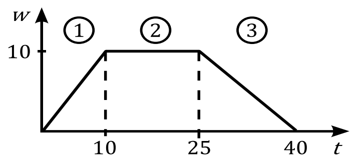
- Zmiana wyjścia jako różnica

Wrażliwość można również badać symulacyjnie wyznaczając różnicę wyjść otrzymanych dla parametru zmienionego oraz parametru nominalnego. Wykresy uzyskane w ten sposób są pokazane wyżej liniami przerywanymi. Poniżej znajdują się generujące je instrukcje.

```
K=2;beta=1;         K=2.2; beta=1;        K=2;beta=1.01;
L=K;                L=K;                  L=K;
M=[1 2 K*beta];     M=[1 2 K*beta];       M=[1 2 K*beta];
t=0:0.1:11;         yK=step(L,M,t);       ybeta=step(L,M,t);
yu=step(L,M,t);     plot(t,yK-yu,'--')    plot(t,ybeta-yu,'--')
```

Z 3.2. Dany jest układ regulacji pokazany niżej. Ile wynosi błąd ustalony w każdej z trzech faz wielkości zadanej *w*(*t*) ? Pokaż spodziewaną odpowiedź. Jak wygląda przebieg błędu regulacji *e*(*t*) ?





Rozwiązanie

- $G(s) = 5\left(1 + \frac{1}{2s}\right)\frac{e^{-0.1s}}{s+1} = 5\frac{2s+1}{2s}\frac{e^{-0.1s}}{s+1}$

  $K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \infty, \quad K_v = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) = \frac{5}{2},$

  $K_a = \lim_{s\to 0} s^2 \cdot G(s) = 0$

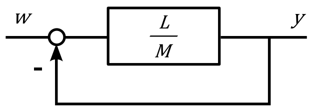
- Fazy

  1. $w(t) = \frac{10}{10} \cdot t = t, \qquad e_{u1} = \frac{1}{K_v} \cdot 1 = \frac{2}{5}$

  2. $w(t) = 10 \cdot 1(t), \qquad e_{u2} = \frac{1}{1+K_p} \cdot 10 = 0$

  3. $w(t) = -\frac{10}{15}t + \frac{80}{3}, \qquad e_{u3} = \frac{1}{K_V} \cdot \left(-\frac{10}{15}\right) = -\frac{4}{15}$

- Matlab

  Aproksymacja Padé 7-go stopnia

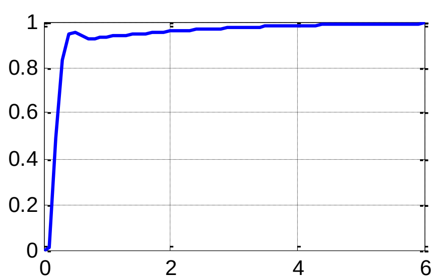
```
[Lp Mp]=pade(0.1,7);
L=conv(5*[0 2 1],Lp);
M=conv([2 2 0],Mp)
```

  $$G_{zam} = \frac{\frac{L}{M}}{1+\frac{L}{M}} = \frac{L}{M+L}$$

  Uwaga. Matlab wymaga, aby dodawane wielomiany *L*, *M* miały jednakowy stopień.

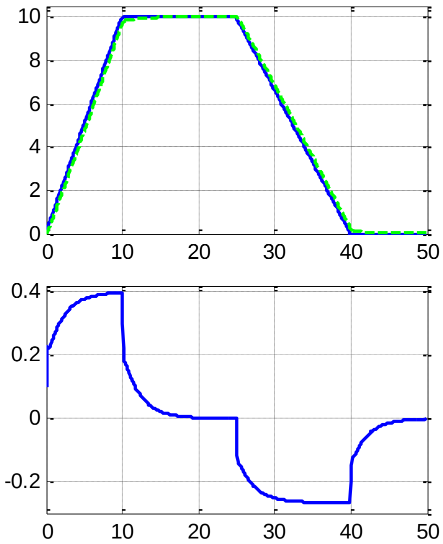
  Odpowiedź skokowa układu zamkniętego (kontrola nastaw)

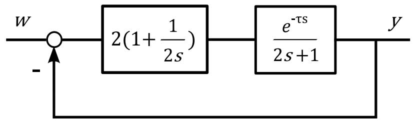
```
t=0:0.1:6;
y=step(L,L+M,t);
plot(t,y);grid
```



Fazy 1, 2, 3

```
for i=1:100, w(i)=i*0.1;
end;
for i=101:250, w(i)=10;
end;
for i=251:400,
w(i)=10+(250-i)*2/3*0.1;
end;
for i=401:500, w(i)=0;
end;
size(w)
t=0:0.1:49.9;
y=lsim(L,L+M,w,t);
plot(t,w,t,y);grid
plot(t,w'-y);grid
```





Z 3.3. Nominalna wartość opóźnienia τ w układzie sterowania wynosi 0.4. Po pewnym czasie wzrosło ono o 10%. Jaką zmianę wyjścia $\Delta y_\tau(t)$ spowodowało to dla $w(t) = 1(t)$? Wykaż, że ustalona wartość wyjścia nie uległa zmianie.

Rozwiązanie

- $G(s,\tau) = 2\left(1+\frac{1}{2s}\right)\cdot\frac{e^{-\tau s}}{2s+1}$, $\tau = 0.4$, $\frac{\Delta\tau}{\tau} = 0.1\ (10\%)$, $H = 1$

- $G(s,\tau) = 2\frac{2s+1}{2s}\cdot\frac{e^{-\tau s}}{2s+1} = \frac{e^{-\tau s}}{s} = \frac{e^{-0.4s}}{s}$

$$S_\tau = \frac{\tau}{G}\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{\tau}{\frac{e^{-\tau s}}{s}}\frac{1}{s}e^{-\tau s}(-s) = -\tau s = -0.4\,s$$

$$G_{zam} = \frac{G}{1+GH} = \frac{\frac{e^{-\tau s}}{s}}{1+\frac{e^{-\tau s}}{s}} = \frac{e^{-\tau s}}{s+e^{-\tau s}} = \frac{e^{-0.4s}}{s+e^{-0.4s}}$$

$$\frac{1}{1+GH} = \frac{1}{1+\frac{e^{-\tau s}}{s}} = \frac{s}{s+e^{-\tau s}} = \frac{s}{s+e^{-0.4s}}$$

$$S_\tau^{zam} = \frac{1}{1+GH} S_\tau^G = \frac{s}{s+e^{-0.4s}} \cdot (-0.4s) = \frac{-0.4s^2}{s+e^{-0.4s}}$$

$$\Delta Y_\tau(s) = S_\tau^{zam} G_{zam} \frac{\Delta\tau}{\tau} W(s) = \frac{-0.4s^2}{s+e^{-0.4s}} \cdot \frac{e^{-0.4s}}{s+e^{-0.4s}} \cdot 0.1 \cdot W(s) =$$

$$= \frac{-0.04s^2}{(s+e^{-0.4s})^2} e^{-0.4s} W(s), \qquad W(s) = \frac{1}{s}$$

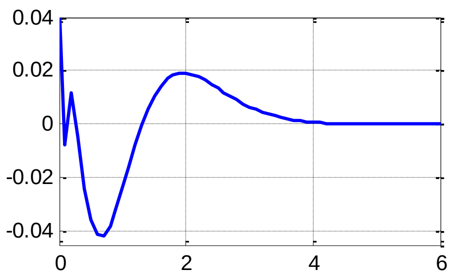
$$\Delta y_\tau(t \to \infty) = lim_{s\to 0}\, s \cdot \Delta Y_\tau(s) = lim_{s\to 0} \frac{-0.04s^2}{(s+e^{-0.4s})^2} e^{-0.4s} s \frac{1}{s} = 0$$

- Matlab

Przekształcenia dla proksymacji Padé: $e^{-0.4s} \cong \frac{L_p}{M_p}$

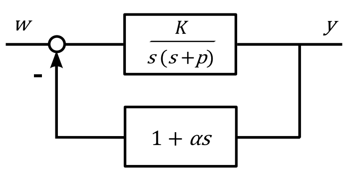
$$\frac{-0.04s^2}{\left(s+\frac{L_p}{M_p}\right)^2} \cdot \frac{L_p}{M_p} = \frac{-0.04s^2 M_p^2}{\left(M_p s + L_p\right)^2} \cdot \frac{L_p}{M_p} = \frac{-0.04s^2 L_p M_p}{\left(M_p s + L_p\right)^2}$$

```
[Lp Mp]=pade(0.4,3);
L=conv(Lp,Mp);
L=-0.04*[L 0 0];
M=[Mp 0]+[0 Lp];
M=conv(M,M);
t=0:0.1:6;
dy=step(L,M,t);
plot(t,dy);grid
```



Wyjaśnienie. Matlab nie zezwala na przekroczenie stopnia 12 przez mianownik $\left(M_p s + L_p\right)^2$. Ogranicza to rząd aproksymacji Padé do 5.

Z 3.4. Serwomechanizm ze sprzężeniem pozycyjno-prędkościowym ma schemat jak na rysunku, przy czym nominalne wartości parametrów wynoszą $K = 10$, $p = 2$, oraz $\alpha = 0.14$. Określić:



a) wrażliwość S_p^{zam} transmitancji układu zamkniętego względem bieguna p,

b) zmianę błędu ustalonego Δe_u dla wymuszenia liniowego $w(t) = t \cdot 1(t)$ przy wzroście p o 5% .

Rozwiązanie

- $G(s,p) = \frac{K}{s(s+p)}$, $\quad H(s) = 1 + \alpha s, \quad K = 10, \quad p = 2$

  $\alpha = 0.14, \quad \frac{\Delta p}{p} = 0.05\ (5\%)$

- $S_p = \frac{p}{G}\frac{\partial G}{\partial p} = \frac{p}{\frac{K}{s(s+p)}}\frac{K}{s}\left(-\frac{1}{(s+p)^2}\right) = -\frac{p}{s+p} = -\frac{2}{s+2}$

  $\frac{1}{1+GH} = \frac{1}{1+\frac{K}{s(s+p)}(1+\alpha s)} = \frac{s(s+p)}{s(s+p)+K(1+\alpha s)} = \frac{s(s+2)}{s^2+3.4s+10}$

  $S_p^{zam} = \frac{1}{1+GH}S_p = \frac{s(s+2)}{s^2+3.4s+10}\cdot\frac{-2}{s+2} = \frac{-2s}{s^2+3.4s+10}$

- $\Delta Y(s) = S_p^{zam} G_{zam}\frac{\Delta p}{p}W(s), \qquad W(s) = \frac{1}{s^2}$

  $G_{zam} = \frac{G}{1+GH} = \frac{K}{s(s+p)+K(1+\alpha s)} = \frac{10}{s^2+3.4s+10}$

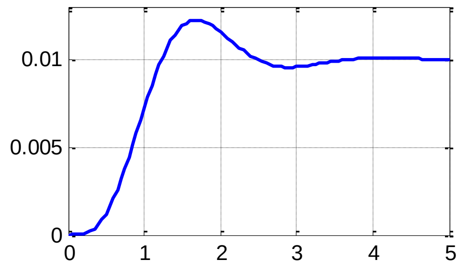
  $\Delta Y(s) = \frac{-2s}{s^2+3.4s+10}\cdot\frac{10}{s^2+3.4s+10}\cdot 0.05\cdot\frac{1}{s^2} = -\frac{1}{s(s^2+3.4s+10)^2}$

  $\Delta E(s) = -\Delta Y(s) = \frac{1}{s(s^2+3.4s+10)^2}$

  $$\Delta e_u = \lim_{t\to\infty}\Delta e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)e = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s(s^2+3.4s+10)^2} = 0.01$$

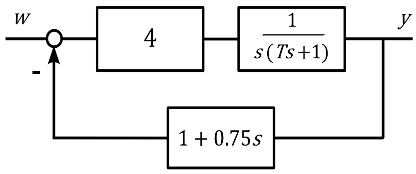
- Matlab

```
L=1; M=[1 3.4 10];
M=conv(M,M);
t=0:0.05:5;
de=step(L,M,t);
plot(t,de),grid
```



Zadania domowe

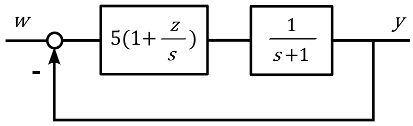
D 3.1. Dla układu sterowania pokazanego obok dokonaj analizy wrażliwości względem stałej czasowej obiektu T, tzn. wyznacz (Matlab) S_T, S_T^{zam}, $\Delta Y_T(s)$, $\Delta y_T(t)$, biorąc



$T = 1, \quad w(t) = 1(t), \quad \frac{\Delta T}{\bar{T}} = 0.1$ (10%).

Odp.: $\quad S_T = -\frac{s}{s+1}, \quad S_T^{zam} = -\frac{s^2}{(s+2)^2}, \quad \Delta Y_T(s) = -\frac{0.4s}{(s+2)^4}$

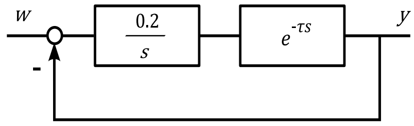
D 3.2. Przeprowadź analizę wrażliwości układu względem zera z regulatora dla danych $z = 1$,



$w(t) = 1(t), \quad \frac{\Delta z}{\bar{z}} = 0.1$ (10%).

Odp.: $\quad S_z = \frac{1}{s+1}, \quad S_z^{zam} = \frac{s}{(s+1)(s+5)}, \quad \Delta Y_z(s) = \frac{0.5}{(s+1)(s+5)^2}$

D 3.3. Zbadaj wrażliwość następującego układu sterowania na zmiany opóźnienia τ obiektu dla danych



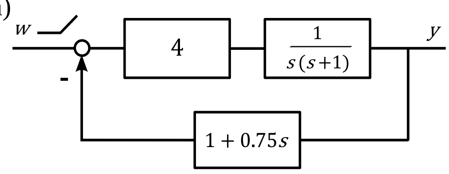
$\tau = 2, \quad w(t) = 1(t), \quad \frac{\Delta \tau}{\bar{\tau}} = 0.1$ (10%).

Odp.: $\quad S_\tau^{otw} = -2s, \quad S_\tau^{zam} = \frac{-2s^2}{s+0.2e^{-2s}}, \quad \Delta Y(s) = -\frac{0.2e^{-2s} \cdot 2s^2}{(s+0.2e^{-2s})^2} \cdot \frac{0.1}{s}$

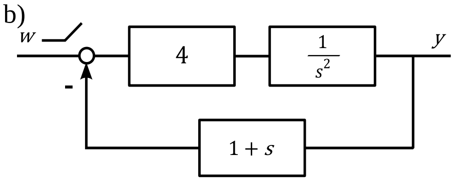
Wyjaśnienie. Dla obiektu o transmitancji $e^{-\tau s}$ (tzw. „czyste" opóźnienie) zalecany jest regulator typu I, jak pokazany na rysunku.

D 3.4. Pierwszy z dwu układów pokazanych niżej reprezentuje serwomechanizm ze sterowaniem napięciowym, a drugi serwomechanizm ze sterowaniem prądowym. Wyznacz ustalone błędy e_u tych układów dla wymuszenia liniowego $w(t) = t \cdot 1(t)$.

a)

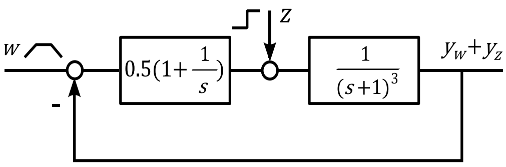


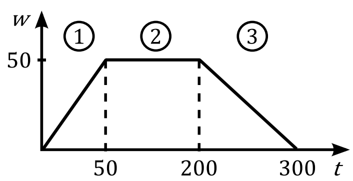
b)



Odp.: $e_{u,a} = \frac{1}{4}$, $e_{u,b} = 0$

D 3.5. Ile wynoszą błędy ustalone e_u w każdej z trzech faz wielkości zadanej dla układu regulacji programowej pokazanego niżej na rysunku? Wyznacz ustaloną odpowiedź na skokowe zakłócenie $z(t) = 10 \cdot 1(t)$.





Odp.: $e_{u,1} = 2$, $e_{u,2} = 0$, $e_{u,3} = -1$, $y_{zu} = 0$