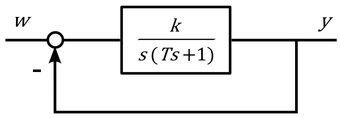
4. UKŁADY II RZĘDU. STABILNOŚĆ

Podstawowe wzory

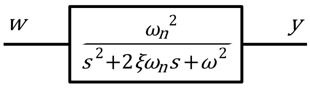
Układ II rzędu ze sprzężeniem zwrotnym

- Standardowy schemat



$$\frac{k}{T} = \omega_n^2, \quad \frac{1}{T} = 2\xi\omega_n \qquad (4.1)$$

- Transmitancja układu zamkniętego



ω_n – częstotliwość naturalna

ξ – współczynnik tłumienia

- Odpowiedź skokowa

– aperiodyczna $\quad \xi > 1: \quad y(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}$

– aperiodyczna krytyczna $\quad \xi = 1: \quad y(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{T}\right) e^{\frac{t}{T}} \qquad (4.2)$

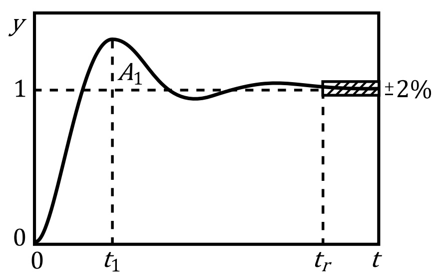
– oscylacyjna $\quad \xi < 1: \quad y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega t + \phi)$

- Przeregulowanie

$$p_{\%} = A_1 \cdot 100 = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} 100$$

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\xi = \frac{\left|\ln\frac{p_{\%}}{100}\right|}{\sqrt{\pi^2+\ln^2\frac{p_{\%}}{100}}}$$



(4.3)

$p_{\%}$	4.3	5	10	15	16.3	20	25
ξ	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0.69	0.59	0.51	0.5	0.46	0.4

- Czas regulacji

  $t_r = \frac{4}{\xi\omega_n}$ – ustalanie z dokładnością 2% (4.4)

  Uwaga. Jeżeli t_r ma reprezentować czas potrzebny na ustalanie z dokładnością 5% lub 1%, to w liczniku zamiast 4 należy wstawić odpowiednio 3 lub 4.6

- Reguły upraszczania transmitancji

  1. Odrzucane bieguny i zera powinny być przynajmniej 3…4 razy większe co do modułu od dominującego bieguna (najmniejszego).
  2. Zero licznika i biegun mianownika można zredukować wówczas, jeżeli nie różnią się bardziej niż o 15…20%.
  3. Odrzucanie i redukcja polegają na wstawieniu $s = 0$ do odpowiednich czynników $s + z,\ s + p$ w liczniku i mianowniku celem zachowania wzmocnienia statycznego.

Kryterium stabilności Hurwitza

- Wielomian charakterystyczny

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \quad a_n > 0$$

- Wyznacznik Hurwitza

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

- Warunek stabilności

  Podwyznaczniki $\Delta_1,\ \Delta_2, \cdots,\ \Delta_{n-1}$ powinny być dodatnie.

- Układ III rzędu

  $\Delta_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 a_1 > a_3 a_0$ – iloczyn wyrazów środkowych ma być większy od iloczynu wyrazów skrajnych. (4.6)

Kryterium stabilności Routha

- Tablica Routha

$$
\begin{array}{llllll}
s^n: & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\
s^{n-1}: & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\
s^{n-2}: & b_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} & b_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} & b_3 = & \cdots & \\
s^{n-3}: & c_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1} & c_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1} & & & \\
\cdots & \cdots & & & & \\
s^0: & & & & &
\end{array}
\tag{4.7}
$$

- Warunek stabilności

  W pierwszej kolumnie powinny znajdować się dodatnie elementy, tzn. a_n, a_{n-1}, b_1, c_1 itd. Jeżeli w pierwszej kolumnie występują elementy ujemne (wielomian niestabilny), to liczba zmian znaku określa liczbę pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie.

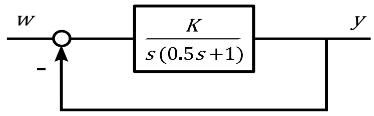
- Pierwszy element zerowy

  Jeżeli wiersz poza zerem na początku ma przynajmniej jeden niezerowy składnik, to zero w pierwszej kolumnie zastępuje się przez małą dodatnią liczbę ε i kontynuuje budowę tablicy. Na końcu lub na bieżąco analizuje się znaki przy $\varepsilon \to 0$.

- Zerowy wiersz

  Jeżeli wiersz zawiera same zera, to korzystamy z wyrazów w poprzednim wierszu budując wielomian pomocniczy odpowiedniego stopnia. Następnie różniczkujemy ten wielomian, współczynniki pochodnej wpisujemy zamiast zerowego wiersza i kontynuujemy procedurę. Wielomian pomocniczy jest podzielnikiem wielomianu głównego, zatem jego pierwiastki są pierwiastkami wielomianu głównego i na ogół można je obliczyć. Wielomian główny nie jest stabilny (niestabilny lub na granicy stabilności).

Przykłady



Z 4.1. Układ sterowania ma postać jak na rysunku.

a) Czy można jednocześnie uzyskać przeregulowanie 10% i czas regulacji mniejszy niż 1 sekunda?

b) Jeżeli nie, to podaj wartość *K*, która czyni zadość pierwszemu warunkowi (10%). Jaki będzie teraz czas regulacji? W jakim momencie wystąpi przeregulowanie?

Rozwiązanie

a) $p_{\%} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}100 \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{\left|\ln\frac{p_{\%}}{100}\right|}{\sqrt{\pi^2+\ln^2\frac{p_{\%}}{100}}} = 0.59$

$$G_{zam}(s) = \frac{\frac{K}{s(0.5s+1)}}{1+\frac{K}{s(0.5s+1)}} = \frac{K}{s(0.5s+1)+K} = \frac{K}{0.5s^2+s+K} = \frac{2K}{s^2+2s+2K}$$

$\begin{cases} 2\xi\omega_n = 2 \\ \omega_n^2 = 2K \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{1}{\xi} = \frac{1}{0.59} \cong 1.7$ – wymaganie pochodzące od $p_{\%} = 10$

$t_r = \frac{4}{\xi\omega_n} < 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_n > \frac{4}{\xi} = 6.7$ – wymaganie pochodzące od $t_r < 1$ i $p_{\%} = 10$

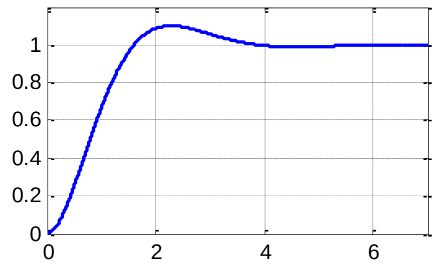
Nie można jednocześnie uzyskać $p_{\%} = 10$ oraz $t_r < 1$.

b) $\omega_n = 1.7$ i $\omega_n^2 = 2K \quad \Rightarrow \quad 2K = 1.7^2 \quad \Rightarrow \quad K = 1.44$

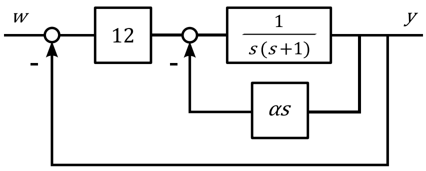
$$t_r = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{0.59 \cdot 1.7} \cong 4, \quad t_1 = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \cong 2.29$$

- Matlab

```
L=2*1.44;
M=[1 2 2*1.44];
t=0:0.01:7;
y=step(L,M,t);
plot(t,y);grid
```



Z 4.2. Dany jest serwomechanizm z silnikiem sterowanym napięciowo.



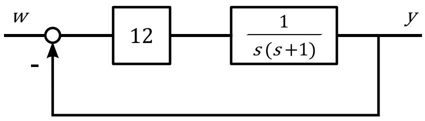
a) Sprzężenie tachometryczne zostało odłączone, tzn. $\alpha = 0$. Ile wyniesie przeregulowanie $p_{\%}$ i czas regulacji t_r? Jaki będzie błąd ustalony e_u dla wymuszenia liniowego $w(t) = t \cdot 1(t)$?

b) Sprzężenie tachometryczne dołączono ustawiając $\alpha = 2$. Jak teraz wyglądają $p_{\%}$, t_r i e_u?

c) Dobierz α tak, aby współczynnik tłumienia ξ wzrósł do 0.6. Ile wyniosą $p_{\%}$, t_r, e_u?

Rozwiązanie

a) $\alpha = 0$



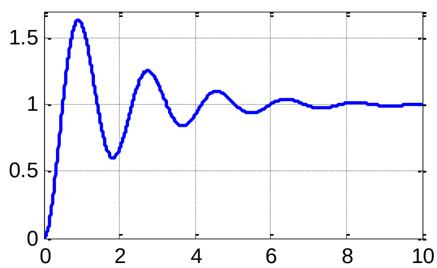
$$G_{zam}(s) = \frac{12}{s^2+s+12}$$

$$\omega_n = \sqrt{12}, \quad 2\xi\omega_n = 1 \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{2\sqrt{12}} = 0.144 \quad \Rightarrow \quad p_{\%} = 63.24$$

$$t_r = \frac{4}{\xi\omega_n} = 8$$

- Matlab

```
L = 12;
M = [1 1 12];
t=0:0.01:10;
```

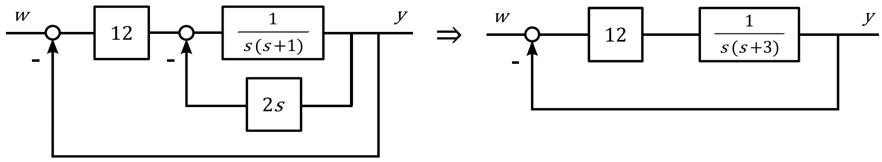


```
y=step(L,M,t);
plot(t,y),grid
```

$G_{otw}(s) = \frac{12}{s(s+1)}$, $\quad K_v = \lim_{s\to 0} sG_{otw}(s) = 12$

$e_u = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{12} = 0.0833$

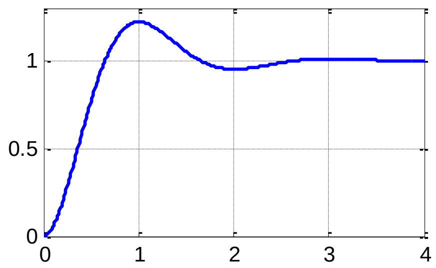
b) $\alpha = 2$



$$G_{zam} = \frac{12}{s^2+3s+12}$$

$\omega_n = \sqrt{12}$

$\xi = \frac{3}{2\sqrt{12}} = 0.433$

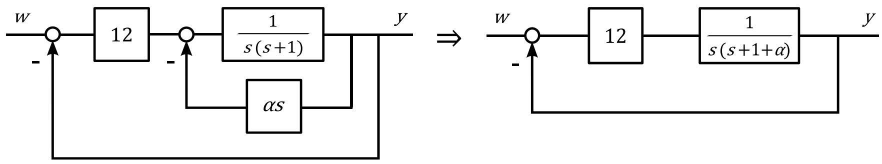


$p_{\%} = 22.1$

$t_r = \frac{8}{3} = 2.67$

$e_u = \frac{3}{12} = 0.25$

c) $\xi = 0.6$

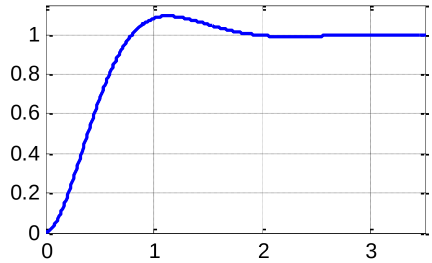


$$G_{zam}(s) = \frac{12}{s^2+(1+\alpha)s+12}$$

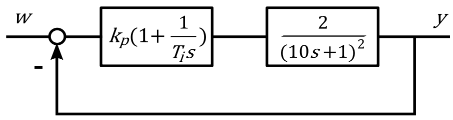
$\omega_n = \sqrt{12}, \quad 2\xi\omega_n = 1+\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2\cdot 0.6\cdot\sqrt{12} - 1 = 3.157$

$$t_r = \frac{4}{1+\alpha} = 0.9623$$

$$e_u = \frac{1+\alpha}{12} = 0.3464$$



Z 4.3. Dla układu pokazanego obok wyznaczyć obszar stabilności na płaszczyźnie (k_p, T_i).



Rozwiązanie

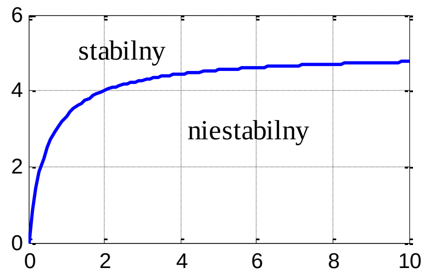
- $G_{zam} = \frac{2k_p(T_i s+1)}{100T_i s^3+20T_i s^2+T_i(1+2k_p)s+2k_p}$

- Warunek Hurwitza

  $$20T_i \cdot T_i(1+2k_p) > 100T_i \cdot 2k_p \quad \Rightarrow \quad T_i > \frac{10k_p}{1+2k_p}$$

- Matlab

```
kp=0:0.1:10;
Ti=10*kp./(1+2*kp);
plot(kp,Ti),grid;
xlabel('kp');
ylabel('Ti');
```



Z 4.4. Zbadać stabilność wielomianu

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 10s + 15$$

Rozwiązanie

- Tablica Routha

s^5:	1	3	10	1	3	10

s^4:	2	6	15	2	6	15
s^3:	ε	$\frac{5}{2}$		ε	$\frac{5}{2}$	
s^2:	$6-\frac{5}{\varepsilon}$	15		$-\frac{5}{\varepsilon}$	15	
s^1:	$\frac{30\varepsilon-25-30^2}{12\varepsilon-10}$			$\frac{5}{2}$		
s^0:	15			15		

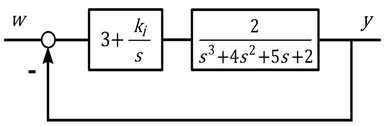
W pierwszej kolumnie przy $\varepsilon \to 0$ występują dwie zmiany znaku, zatem wielomian jest niestabilny, a jego dwa pierwiastki leżą w prawej półpłaszczyźnie.

Uwaga. Po wstawieniu ε do tablicy Routha następne elementy wystarczy ograniczyć do dominujących składników, jak to pokazano wyżej po prawej stronie. Skraca to zapis i upraszcza obliczenia.

- Matlab

`roots([1 2 3 6 10 15])` $0.82 \pm 1.8j,\ -1.8,\ -0.9 \pm 1.36j$

Z 4.5. Wyznacz zakres wzmocnienia k_i składowej całkującej regulatora, aby układ pokazany na rysunku był stabilny.



Rozwiązanie

- $G_{zam}(s) = \frac{3s+k_i}{s^4+4s^3+5s^2+5s+k_i}$

- Tablica Routha

s^4:	1	5	k_i
s^3:	4	5	0

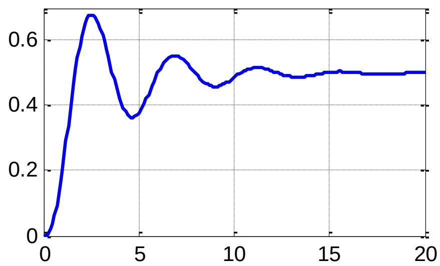
$$
\begin{array}{lll}
s^2: & \frac{15}{4} & k_i \\
s^1: & \frac{4k_i - \frac{75}{4}}{-\frac{15}{4}} & 0 \\
s^0: & k_i &
\end{array}
$$

Warunek stabilności: $\frac{4k_i - \frac{75}{4}}{-\frac{15}{4}} > 0 \Rightarrow 4k_i - \frac{75}{4} < 0 \Rightarrow k_i < \frac{75}{16} \cong 4.7$

Ostatecznie $0 < k_i < 4.7$

- Matlab – kontrola odpowiedzi dla $k_i = 1$

```
ki=1;
L=[0 0 0 3 ki];
M=[1 4 5 5 ki];
roots(L+M)
t=0:0.1:20;
y=step(L,L+M,t);
plot(t,y);grid
```



Z 4.6. Zbadać stabilność wielomianu $a(s) = s^4 + 4$. Jakie są jego pierwiastki?

Rozwiązanie

- Tablica Routha

$$
\begin{array}{llllll}
s^4: & 1 & 0 & 4 & \Rightarrow & a_{pom}(s) = s^4 + 1 \\
\cancel{s^3:} & \cancel{0} & \cancel{0} & & & \Downarrow \\
s^3: & 4 & 0 & & \Leftarrow & \frac{da_{pom}}{ds} = 4s^3 \\
s^2: & \varepsilon & 4 & & & \\
s^1: & -\frac{16}{\varepsilon} & & & & \\
s^0: & 4 & & & &
\end{array}
$$

W pierwszej kolumnie przy $\varepsilon \to 0$ występują dwie zmiany znaku, zatem wielomian jest niestabilny, a jego dwa pierwiastki leżą w prawej półpłaszczyźnie.

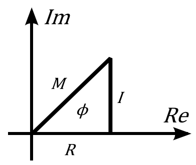
- Pierwiastki

  W tym szczególnym przypadku wielomian pomocniczy $a_{pom}(s)$ jest równy wielomianowi głównemu $a(s)$.

  Pierwiastek z liczby zespolonej:

  $$s^2 = R + jI = Me^{j\phi}, \quad M = \sqrt{R^2 + I^2}$$

  $$\phi = \text{arctg}\frac{I}{R}$$



  $$s_1 = \sqrt{M}e^{j\frac{\phi}{2}}, \quad s_2 = -\sqrt{M}e^{j\frac{\phi}{2}}, \quad e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$$

  $$s^4 = -4 = 4e^{j180}$$

  1) $s^2 = 2e^{j90^\circ} = 2j \quad \Rightarrow \quad s_1 = \sqrt{2}e^{j45^\circ} = 1 + 1j, \quad s_2 = -\sqrt{2}e^{j45^\circ} = -1 - 1j$

  2) $s^2 = -2e^{j90^\circ} = 2e^{j270^\circ} \quad \Rightarrow \quad s_3 = \sqrt{2}e^{j135^\circ} = -1 + 1j, \quad s_4 = -\sqrt{2}e^{j135^\circ} = 1 - 1j$

  Pary sprzężone: $-1 \pm 1j, \quad 1 \pm 1j$.

Z 4.7. Zaaproksymować transmitancję

$$G(s) = \frac{s^2+9s+20}{s^5+12s^4+65s^3+180s+234s+108}$$

transmitancją niższego rzędu. Porównać odpowiedzi skokowe.

Rozwiązanie

- `L=[1 9 20]; roots(L)` $\Rightarrow$ $-4, -5$

  `M=[1 12 65 180 234 108];`

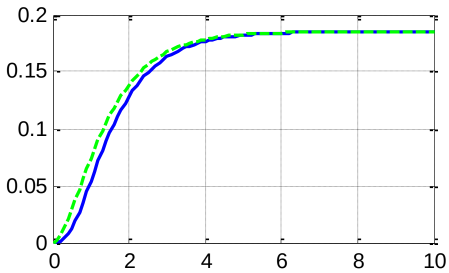
  `roots(M)` $\Rightarrow$ $-1, -2, -3, -3 \pm 3j$, `abs(-3+3i)` $\Rightarrow$ 4.2426

$$G(s) = \frac{(s+4)(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)[(s+3)^2+3^2]}$$

Dominującym biegunem jest -1. Przyjmując, że odrzuca się pierwiastki przynajmniej 3-krotnie większe co do modułu od dominującego bieguna mamy

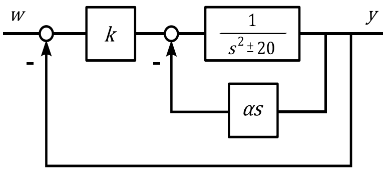
$$G(s) \cong \frac{4\cdot 5}{(s+1)(s+3)\cdot 3\cdot(9+9)} = \frac{\frac{10}{27}}{(s+1)(s+2)}$$

- ```
  t=0:0.1:10
  y=step(L,M,t);
  ya=step(10/27,
          [1 3 2],t);
  plot(t,y,t,ya,'--'),
  grid
  ```



Zadania domowe

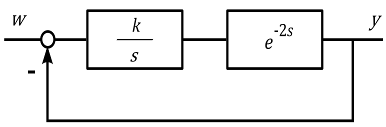
D 4.1. Dla układu sterowania ramieniem robota skierowanym najpierw w dół, a potem w górę, dobrać nastawy *k*, α tak, aby uzyskać przebiegi aperiodyczne krytyczne ($p_{\%} = 0 \Rightarrow \xi = 1$) z czasem regulacji 0.5 sekundy.



Odp.: $G_1(s) = \frac{1}{s^2+20} \quad \Rightarrow \quad k = 44, \quad \alpha = 16$

$G_2(s) = \frac{1}{s^2-20} \quad \Rightarrow \quad k = 84, \quad \alpha = 16$

D 4.2. Dobrać wzmocnienie k regulatora całkującego, który sterując obiektem e^{-2s} („czysto" opóźniającym) zapewni przeregulowanie 4.3%. Jakiego czasu regulacji można się spodziewać? Jak wygląda odpowiedź skokowa?

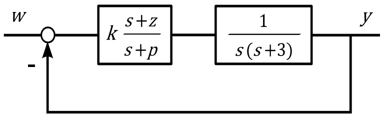


Wskazówki. Projektowanie: $e^{-\tau s} \cong \frac{-\frac{\tau}{2}s+1}{\frac{\tau}{2}s+1}$ (Padé – rząd 1)
  ```

Symulacja: aproksymacja Padé – rząd 8..10.

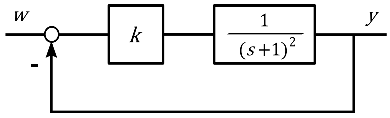
Odp.: $k = 0.268, \quad t_r = 10.94$

D 4.3. W układzie regulacji zero regulatora z dobiera się eliminując biegun obiektu (czyli 3). Wyznaczyć k, p tak, aby przeregulowanie wynosiło 5%, a czas regulacji $\frac{4}{3}$ sekundy.



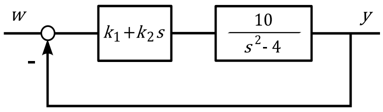
Odp.: $z = 3, \quad k = 18.9, \quad p = 6$

D 4.4. Czy w układzie sterowania można dla wymuszenia $w(t) = 1(t)$ jednocześnie uzyskać błąd ustalony $e_u = 0.02$ oraz przeregulowanie $p_{\%} = 16.3$?



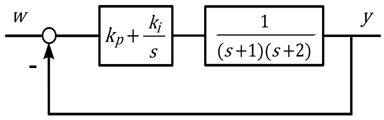
Odp.: nie

D 4.5. Jeden z układów sterowania pocisku manewrującego ma schemat jak na rysunku. Wyznaczyć parametry k_1, k_2 tak, aby częstotliwość naturalna ω_n wynosiła 10 rd/s, a współczynnik tłumienia ξ był równy 0.5. Jaki będzie wtedy czas regulacji t_r i przeregulowanie $p_{\%}$?



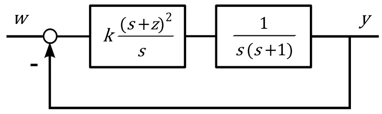
Odp.: $k_1 = 10.4, \quad k_2 = 1, \quad t_r = 0.8, \quad p_{\%} = 16.5$

D 4.6. Dla układu sterowania wyznacz obszar stabilności na płaszczyźnie $(k_i,\ k_p)$. Warunek stabilności określ zarówno w oparciu o kryterium Hurwitza jak i Routha.



Odp.: $k_p > \frac{1}{3}k_i - 2, \quad k_i > 0$

D 4.7. Jaki warunek powinny spełniać nastawy k, z regulatora PID, aby układ



był stabilny? Ile wynoszą bieguny układu dla $k = 1,\ z = 4$?

Odp.: $k > \frac{z}{2} - 1$, bieguny $-2,\ \pm 2.82$

D 4.8. Ile pierwiastków wielomianu

$$s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 6s + 9$$

leży w lewej, a ile w prawej półpłaszczyźnie? Jakie są te pierwiastki?

Odp.: Trzy pierwiastki w lewej, dwa w prawej

$-2.9,\quad 0.65 \pm 1.28j,\quad -0.70 \pm 0.99j$

D 4.9. Co można powiedzieć o stabilności i pierwiastkach wielomianów

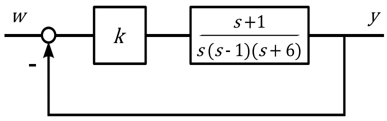
a) $s^4 + 4s^3 + 7s^2 + 16s + 12$

b) $s^5 + 6s^4 + 12s^3 + 12s^2 + 11s + 6$

Odp.: a) granica stabilności: $-1,\ -3,\ \pm 2j$

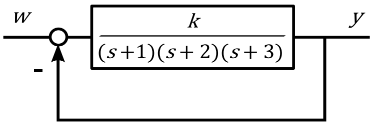
b) granica stabilności: $-1,\ -2,\ -3,\ \pm 1j$

D 4.10. Wyznaczyć przedział wzmocnienia *k*, w którym układ sterowania jest stabilny. Ile wynoszą bieguny dla $k = 7.5$?



Odp.: $k > 7.5,\quad \pm j\sqrt{\frac{7.5}{5}},\quad -5$

D 4.11. Dla jakich wartości wzmocnienia *k* układ sterowania jest stabilny? Ile wynoszą bieguny dla $k = 60$, $k = -6$?



Odp.: $-6 < k < 60,\quad k = 60 \quad\Rightarrow\quad \pm j\sqrt{11},\ -6$

$k = -6 \quad\Rightarrow\quad 0,\ -3 \pm 1.41j$