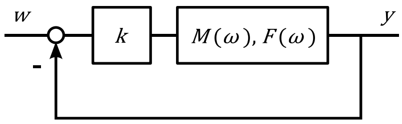
6. METODY CZĘSTOTLIWOŚCIOWE

Regulator P

Problem



– dane: $p_{\%},\ M(\omega),\ F(\omega)$

– szukane: $k,\ t_r$

> *Uwaga*. Charakterystyki częstotliwościowe $M(\omega)$, $F(\omega)$ otrzymuje się na podstawie transmitancji $G(s)$ lub eksperymentalnie.

Tok projektowania

- Zapas fazy PM

$$p_{\%} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{\left|\ln\frac{p_{\%}}{100}\right|}{\sqrt{\pi^2+\ln^2\frac{p_{\%}}{100}}} \quad \Rightarrow \quad \text{PM} \tag{6.1a}$$

$$\text{PM} = 90° - \text{arctg}\frac{\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}}{2\xi} \underset{\text{gdy } \xi \le 0.6}{\cong} 100\xi \tag{6.1b}$$

- Charakterystyki częstotliwościowe obiektu

$$M(\omega) = |G(j\omega)|, \quad F(\omega) = \measuredangle G(j\omega)$$

- Częstotliwość ω_1 odpowiadająca PM

$$F(\omega_1) = -180° + \text{PM} \tag{6.1c}$$

- Wzmocnienie i czas regulacji

$$|G_{otw}(j\omega_1)| = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{M(\omega_1)}, \quad t_r = \frac{8}{\omega_1 \text{tgPM}} \tag{6.1d}$$

Granica stabilności

- Częstotliwość ω_2

$$F(\omega_2) = -180° \tag{6.1e}$$

Zapas modułu GM

Jest to dana do projektowania zamiast przeregulowania $p_{\%}$ (lub zapasu fazy PM).

- Wzmocnienie

$$|G_{otw}(j\omega_2)| = \frac{1}{\mathrm{GM}} \quad \Rightarrow \quad k_p = \frac{1}{\mathrm{GM}\cdot|G(j\omega_2)|} \tag{6.2a}$$

- Zapas modułu wyrażony w decybelach

$$\mathrm{GM}_{dB} = 20\log\mathrm{GM} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{GM} = 10^{\mathrm{GM}_{dB}/20} \tag{6.2b}$$

Matlab

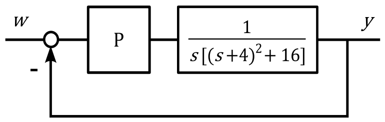
- `w=logspace(d1,d2,N)` – wektor częstotliwości z przedziału $(10^{d1}, 10^{d2})$ o N wartościach; zwykle przyjmuje się 50 lub 100 punktów na dekadę
- `[M,F]=bode(l,m,w)` – charakterystyki modułowa i fazowa transmitancji $G = \frac{l}{m}$ (licznik/mianownik)
- `[w' M F]` – trójkolumnowa tablica, której wiersze zawierają wartości częstotliwości oraz odpowiadające im wartości modułu i fazy
- Wykresy charakterystyk logarytmicznych

  `subplot(211); semilogx(w,20*log10(M)), grid` $-M$ w dB

  `subplot(212); semilogx(w,F),grid`

  `clf` – przywrócenie ustawień ekranu (jeden obraz); w starszych wersjach Matlaba była to instrukcja `clg`.

Przykłady

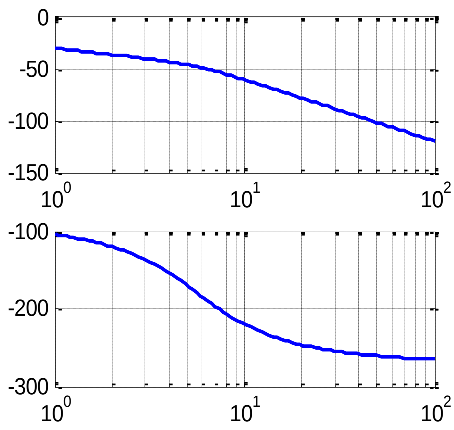


Z 6.1. Dany jest układ sterowania z regulatorem P. Należy wyznaczyć:

a) k_{kr}, ω_{kr} na granicy stabilności

b) k_p, ω_1, t_r, GM_{dB} dla $p_{\%} = 20$

Rozwiązanie



- Matlab

```
l=1;
m=[1 8 32 0];
w=logspace(0,2,100);
[M,F]=bode(l,m,w);
subplot(211);
semilogx(w,20*log10(M)),
grid
subplot(212);
semilogx(w,F),grid
clf
```

a)

```
[w' M  F]
5.3367  0.0044  -175.2872
```

`5.5908  0.0040  -179.0485` granica stabilności – $F = -180°$

```
5.8570  0.0036  -182.8159
```

$\omega_{kr} = 5.59 \frac{rd}{s}$, $\quad k_{kr} = \frac{1}{0.004} = 250$

Uwaga. W prezentowanych programach Matlaba `m` oznacza mianownik transmitancji, a `M` moduł charakterystyki częstotliwościowej.

b) $p_{\%} = 20 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.456 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{PM} \cong 100\xi \cong 45.6° \cong 45°$

- `[w' M F]`

```
2.7826  0.0109  -132.5420
```

`2.9151  0.0104  -134.7772` $\quad F = -180° + 45° = -135°$

```
3.0539  0.0098  -137.1360
```

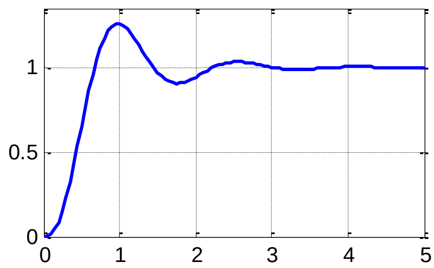
$\omega_1 = 2.91 \frac{rd}{s}$, $\quad k_p = \frac{1}{0.0104} = 96.15$

$$t_r = \frac{8}{\omega_1 \mathrm{tg} PM} = \frac{8}{2.91 \cdot 1} \cong 2.75\ s$$

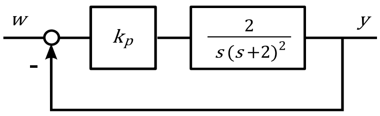
- $M_{otw}(\omega_{kr}) = k_p\ M(\omega_{kr}) = 96.15 \cdot 0.004 = 0.3846$

  $$\mathrm{GM} = \frac{1}{0.3846} = 2.6 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{GM}_{dB} = 20\log\mathrm{GM} = 8.3\ dB$$

-
```
t=0:0.05:5;
l=[0 0 0 96.15*l];
y=step(l,m+l,t);
plot(t,y);grid
max(y)
```
  1.2574 ⇒ 25.74%



Z 6.2. Dany jest układ z regulatorem typu P. Wyznaczyć ω_2, k_p, ω_1 , PM, t_r oraz $p_{\%}$ mając dany zapas modułu GM_{dB}=12.

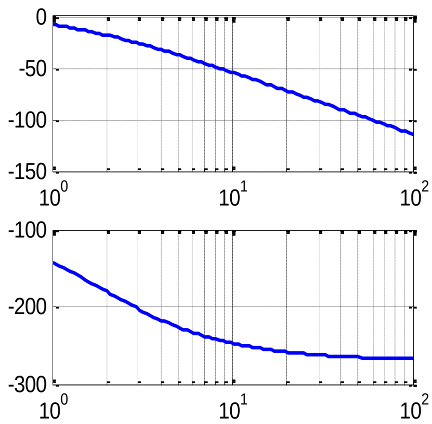


Rozwiązanie

- $\mathrm{GM} = 10^{\frac{\mathrm{GM}_{dB}}{20}} = 3.98 \cong 4, \quad M_{otw}(\omega_2) = \frac{1}{4} = k_p\ M(\omega_2),$

  gdzie $F(\omega_2) = -180°$

- Matlab
```
l=2;
m=[1 4 4 0];
w=logspace(0,2,100);
[M,F]=bode(l,m,w);
subplot(211);
semilogx(w,20*log10(M)),grid
subplot(212);
semilogx(w,F),grid
```



- ω_2, k_p
```
[w' M F]
```

```
1.9179   0.1358   -177.5994
2.0092   0.1239   -180.2639
2.1049   0.1127   -182.9278
```

$F = -180°$

$$\omega_2 = 2\frac{rd}{s}\ , \quad M = 0.1239, \quad k_p = \frac{0.25}{0.1239} \cong 1.8$$

- ω_1, PM, t_r

```
l=1.8*l;
w=logspace(-1,1,100);
[M, F]=bode(l,m,w);
[w' M F]
```

$G_{otw} = 1.8\frac{l}{m}$

```
0.7391   1.0714   -130.5622
0.7743   1.0109   -132.3260
0.8111   0.9528   -134.1515
```

$M = 1$

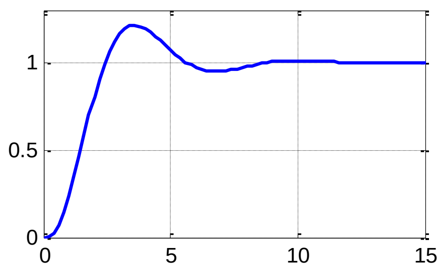
$$\omega_1 = 0.774\frac{rd}{s}, \quad \text{PM} = 180° - 132.3° = 47.7°$$

$$t_r = \frac{8}{\omega_1 \text{tgPM}} = \frac{8}{0.773 \cdot \text{tg}47.7°} = 9.4\ s, \quad p_{\%} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}100 = 21.6$$

-

```
t=0:0.2:20;
l=[0 0 0 l];
y=step(l,m+l,t);
plot(t,y);grid
max(y)
```

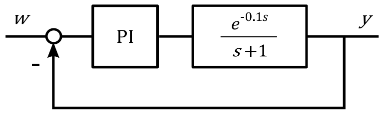
1.2128 ⇒ 21.28%



Reguły Zieglera-Nicholsa

Regulator	k_p	T_i	T_d
P	$0.5k_{p,kr}$	–	–
PI	$0.45k_{p,kr}$	$0.85T_{kr}$	–
PID	$0.6k_{p,kr}$	$0.5T_{kr}$	$0.125T_{kr}$

Przykład



Z 6.3. Dla układu sterowania pokazanego na rysunku wyznaczyć nastawy regulatora PI metodą Zieglera-Nicholsa. Jakiego przeregulowania i czasu regulacji można się spodziewać?

Rozwiązanie

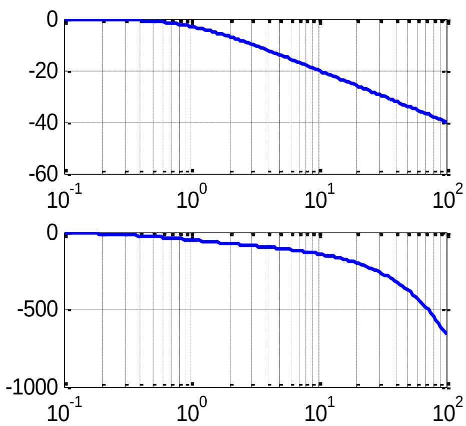
- $k_{p,kr}$, T_{kr}

```
l=1;m=[1 1];
w=logspace(-1,1,100);
```
– wstępny zakres częstotliwości

```
[M Fprim]=bode(l,m,w);
F=Fprim-0.1*w'*180/pi;
[w' M F]
0.1000  0.9950   -6.2836
.......................................................................
10.0000  0.0995 -141.5852
```
– faza nie osiąga -180°, należy więc zwiększyć zakres częstotliwości

```
w=logspace(-1,2,150);
[M Fprim]=bode(l,m,w);
F=Fprim-0.1*w'*180/pi;
[w' M F]
15.6542   0.0638   -176.0368
```
`16.3970   0.0609   -180.4581`
```
17.1751   0.0581   -185.0739
```

$F = -180°$



$$k_{p,kr} = \frac{1}{0.0609} = 16.42$$

$$T_{kr} = \frac{2\pi}{16.39} = 0.38\ s$$

```
subplot(211);
semilogx(w,20*log10(M)),grid
subplot(212);
semilogx(w,F),grid
```

- k_p, T_i – Ziegler-Nichols

  $k_p = 0.45 k_{p,kr} \cong 7.39$

  $T_i = 0.85 T_{kr} = 0.323, \quad z = \frac{1}{T_i} = 3.09$

  PI: $k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = 7.39\left(1 + \frac{1}{0.323s}\right) = 7.39\frac{s+3.09}{s}$

- $p_{\%}$, t_r

```
l=7.39*[1 3.09];
m=[m 0];
[M Fprim]=bode(l,m,w);
F=Fprim-0.1*w'*180/pi;
[w' M F]
```

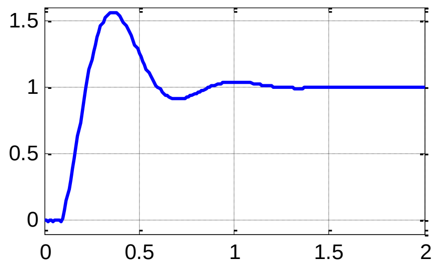
```
7.4556   1.0634   -147.5899
7.8094   1.0094   -149.0351
8.1800   0.9586   -150.5921
```

7.8094 1.0094 -149.0351 $M = 1$

$\omega_1 \cong 7.8\frac{rd}{s}, \quad \mathrm{PM} = 180° - 149.0° = 31°$

$\xi \cong \frac{\mathrm{PM}}{100} = 0.31, \quad p_{\%} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}100 = 35.9$

$t_r = \frac{8}{\omega_1 \mathrm{tgPM}} = \frac{8}{7.8\mathrm{tg}31°} = 1.7\ s$

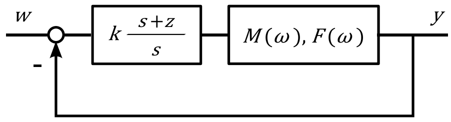


-
```
t=0:0.05:5;
[lp,mp]=pade(0.1,8);
l=conv([0 1],lp);
m=conv(m,mp);
y=step(l,m+l,t);plot(t,y);grid
max(y)
```
  1.5585 ⇒ 55.85%

Regulator PI

$k_p\left(s+\frac{1}{T_i s}\right)=k\frac{s+z}{s}\ ,\qquad k=k_p,\quad z=\frac{1}{T_i}$

Problem



– dane: $p_{\%},\ M(\omega),\ F(\omega)$

– szukane: $k,\ z,\ t_r$

Tok projektowania

- Wybór współczynnika α

  $z=\alpha\omega_1,\quad \alpha=0.1\dots1.0\dots10.0$

  – obiekty typowe: $\alpha<1.0$, np.: $\alpha=0.2,\ 0.316,\ 0.5$

  – obiekty o znacznym opóźnieniu ($\tau\geq T$): $\alpha\geq1.0$, np.: 2, 3.16, 5

- Faza regulatora PI

  $\measuredangle\mathrm{PI}(\alpha)=-90°+\mathrm{arctg}\frac{1}{\alpha}$ – kąt ujemny ! (6.3a)

$\boldsymbol{\alpha}$	0.1	0.2	0.316	0.5	1	2	3.16	5	10
$\measuredangle\mathbf{PI}(\boldsymbol{\alpha})$	-5.7°	-11.3°	-17.5°	-26.5°	-45°	-63.4°	-17.5°	-78.6°	-84.3°

Wniosek. Ze wzrostem α w regulatorze PI zaczyna dominować składowa I.

- Częstotliwość ω_1

  $p_{\%}\quad\Rightarrow\quad\xi\quad\Rightarrow\quad \mathrm{PM}=90°-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}}{2\xi}\cong100\xi$ gdy $\xi\leq0.6$

  $F(\omega_1)=-180°+\ \mathrm{PM}-\measuredangle\mathrm{PI}(\alpha)=$ (6.3.b)

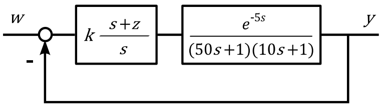
  $-180°+\ \mathrm{PM}+|\measuredangle\mathrm{PI}(\alpha)|$

- Wzmocnienie i czas regulacji

$$k = \frac{1}{M(\omega_1)\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad t_r = \frac{8}{\omega_1 \mathrm{tgPM}} \tag{6.3c}$$

Przykład

Z 6.4. Dobrać nastawy regulatora PI zapewniające przeregulowanie $p_{\%} = 16.3$. Przyjąć $\alpha = 0.2$.



Rozwiązanie

- $\alpha = 0.2 \quad \Rightarrow \quad \measuredangle\mathrm{PI}(\alpha) = -11.3°$

  $p_{\%} = 16.3 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{PM} \cong 50°$

  $-180° + \mathrm{PM} + |\measuredangle\mathrm{PI}(\alpha)| = -180° + 50° + 11.3° = -118.7°$

- Matlab

```
l=[0 0 1];
m=conv([50 1],[10 1]);
w=logspace(-2,0,100);
[M Fprim]=bode(l,m,w);
F=Fprim-5*w'*180/pi;
[w' M F]
```

```
0.0559   0.2940 -115.5416
```

`0.0586   0.2788 -118.2832` $\cong 118.3°$

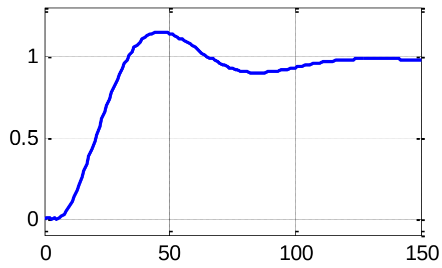
```
0.0614   0.2641 -121.0576
```

$$z = \alpha\omega_1 = 0.2 \cdot 0.0586 = 0.01172, \quad k_p = \frac{1}{M\sqrt{1+\alpha^2}} = 3.52$$

$$\mathrm{PI:}\ 3.52\frac{s+0.0117}{s}, \quad t_r = \frac{8}{\omega_1 \mathrm{tgPM}} = \frac{8}{0.0586\mathrm{tg}50°} = 114.5\ s$$

```
[lp mp]=pade(5,8);
lo=conv(lp,l);
mo=conv(mp,m);
```

```
lr=3.52*[1 0.0117];
mr=[1 0];
l=conv(lo,lr);
m=conv(mo,mr);
t=0:1:150;
y=step(l,l+m,t);
max(y)
```
1.1461 ⇒ 14.61%



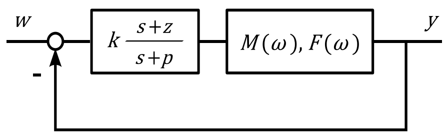
Regulator PD

$$k_p\left(1+\frac{T_d s}{\frac{T_d}{D}s+1}\right)=k\,\frac{s+z}{s+p}\,, \qquad k=k_p\frac{p}{z}\,, \quad z=\frac{1}{T_d\left(1+\frac{1}{D}\right)}\,, \quad p=\frac{D}{T_d}$$

Problem

– dane: $p_{\%},\ t_r,\ M(\omega),\ F(\omega)$

– szukane: $k,\ z,\ p$



Tok projektowania

- Zapas fazy PM i częstotliwość ω_1

$$p_{\%} \quad\Rightarrow\quad \xi \quad\Rightarrow\quad \mathrm{PM}=90°-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}}{2\xi}\cong 100\xi$$

gdy $\xi \le 0.6$

$$t_r \quad\Rightarrow\quad \omega_1=\frac{8}{t_r\mathrm{tgPM}} \qquad (6.4a)$$

- Zero z

$z=\frac{4}{t_r}$ – jak zazwyczaj w metodzie linii pierwiastkowych (6.4b)

- Biegun p

$\Theta=-180°+\mathrm{PM}-F(\omega_1)$ – faza regulatora PD dla częstotliwości ω_1 (6.4c)

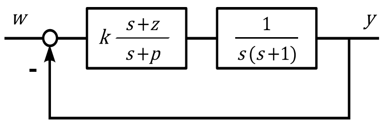
$p = \frac{z+\omega_1 \text{tg}\Theta}{1-\frac{z}{\omega_1}\text{tg}\Theta}$ (6.4d) – wzór stosowany dla $\Theta \leq 55°$, w przeciwnym przypadku potrzebny jest korektor podwójny (PD^2)

- Wzmocnienie k

$$k = \frac{1}{M(\omega_1)}\sqrt{\frac{\omega_1^2+p^2}{\omega_1^2+z^2}} \qquad (6.4e)$$

Przykład

Z 6.5. Dla obiektu $\frac{1}{s(s+1)}$ dobrać korektor PD tak, aby uzyskać przeregulowanie 20% i czas regulacji 4 sekundy.



Rozwiązanie

- $p_{\%} = 20 \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{\left|\ln\frac{P_{\%}}{100}\right|}{\sqrt{\pi^2+\ln^2\frac{P_{\%}}{100}}} = 0.4559 \quad \Rightarrow \quad \text{PM} \cong 100\xi \cong 45°$

$\omega_1 = \frac{8}{t_r \text{tgPM}} = \frac{8}{4\cdot 1} = 2, \quad z = \frac{4}{t_r} = \frac{4}{4} = 1$

- Matlab

```
l=1;
m=[1 1 0];
w=logspace(-1,1,100);
[M F]=bode(l,m,w);
[w' M F]
```

1.9630 0.2312 -153.0051

2.0565 0.2126 -154.0682 $\omega_1 = 2, \quad M(\omega_1) = 0.2126, \quad F(\omega_1) = -154°$

2.1544 0.1954 -155.1012

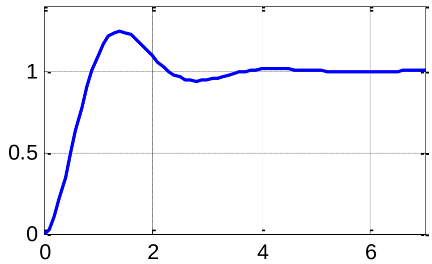
$\Theta = -180° + \text{PM} - F(\omega_1) = -180° + 45° + 154° \cong 19°$

$$p = \frac{z+\omega_1 \mathrm{tg}\Theta}{1-\frac{z}{\omega_1}\mathrm{tg}\Theta} = 2.04 \cong 2, \quad k = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{\omega_1^2+p^2}{\omega_1^2+z^2}} = 5.94 \cong 6$$

$$\text{PD: } k\frac{s+z}{s+p} = 6\frac{s+1}{s+2}$$

```
l=6*[0 0 1 1];
m=conv([1 2],m);
t=0:0.1:10;
y=step(l,m+l,t);
plot(t,y);grid
max(y)
```

1.2454 ⇒ 24.54%



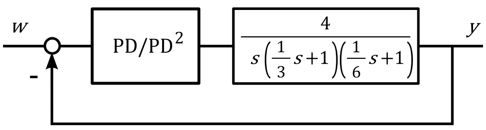
Korektor podwójny $k\left(\frac{s+z}{s+p}\right)^2$ – PD^2

Jest potrzebny, jeżeli $\Theta = -180° + \mathrm{PM} - F(\omega_1) > 55°$.

- Modyfikacje wzorów

$$p = \frac{z+\omega_1 \mathrm{tg}\frac{\Theta}{2}}{1-\frac{z}{\omega_1}\mathrm{tg}\frac{\Theta}{2}}, \quad k = \frac{1}{M(\omega_1)}\frac{\omega_1^2+p^2}{\omega_1^2+z^2} \tag{6.5}$$

Z 6.6. Czy regulator PD, czy PD^2 zapewni przeregulowanie 16.3% i czas regulacji wynoszący 1 sekundę w układzie regulacji pokazanym obok?



Rozwiązanie

- $p_{\%} = 16.3 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{PM} \cong 50.0°$

$$\omega_1 = \frac{8}{t_r \mathrm{tgPM}} = \frac{8}{1\cdot \mathrm{tg}50°} = 6.7$$

- Matlab

```
l=[0 0 0 4];
m=conv([1/3 1 0],[1/6 1]);
```

```
w=logspace(-1,1,100);
[M F]=bode(l,m,w);
[w' M F]
```

```
6.5793   0.1700    -203.1251
6.8926   0.1521    -205.4395
7.2208   0.1358    -207.7145
```

6.8926 0.1521 -205.4395 $\omega_1 \cong 6.7$

$$\Theta = -180° + \mathrm{PM} - F(\omega_1) = -180° + 50° + 205.4° \cong 75.4°$$

Ponieważ $\Theta > 55°$, więc korektor PD nie jest w stanie spełnić wymagań projektowych.

- Korektor PD^2

$$z = \frac{4}{t_r} = \frac{4}{1} = 4, \quad \frac{\theta}{2} = \frac{55°}{2} = 37.7°$$

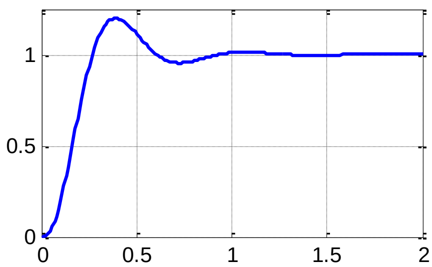
$$p = \frac{z + \omega_1 \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}{1 - \frac{z}{\omega_1}\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}} = \frac{4 + 6.7\mathrm{tg}37.7°}{1 - \frac{4}{6.7}\mathrm{tg}37.7°} = 17.04$$

$$k = \frac{1}{M}\frac{\omega_1^2 + p^2}{\omega_1^2 + z^2} = \frac{1}{0.1521}\frac{6.7^2 + 17.04^2}{6.7^2 + 4^2} = 36.1, \qquad \text{PD: } 36.1\left(\frac{s+4}{s+17}\right)^2$$

- `lk=36.1*conv([1 4],[1 4]);` – korektor

```
mk=conv([1 17],[1 17]);
l=conv(l,lk);
m=conv(m,mk);
t=0:0.01:2;
y=step(l,m+l,t);
plot(t,y);grid
max(y)
```

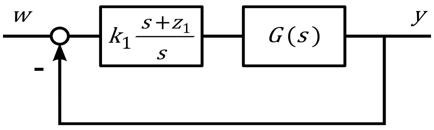
1.1986 ⇒ 19.86%



Regulator PID

I. PID jako PI×PD

$$k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_d s}{\frac{T_d}{D}s+1}\right)=\underbrace{k_1\frac{s+z_1}{s}}_{\text{PI}}\cdot\underbrace{k_2\frac{s+z_2}{s+p_2}}_{\text{PD}}\ ,\quad \left(T_i+\frac{T_d}{D}\right)^2\geq T_i T_d\left(1+\frac{1}{D}\right)$$



Problem

– dane: $p_{\%},\ t_r,\ M(\omega),\ F(\omega)$

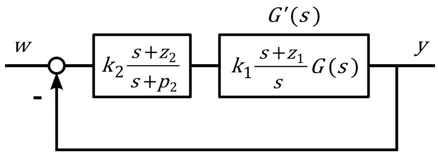
– szukane: $k_1,\ z_1,\ k_2,\ z_2,\ p_2$

Tok projektowania

Regulator PI

- $p_{\%} \quad \Rightarrow \quad \xi \quad \Rightarrow \quad$ PM
- Wybór $\alpha \quad \Rightarrow \quad \measuredangle\text{PI}(\alpha)$
- Częstotliwość ω_1: $\measuredangle G(\omega_1)=-180°+\text{PM}+|\measuredangle\text{PI}(\alpha)|$ (6.6a)
- Nastawy

  $z=\alpha\omega_1,\quad k_1=\frac{1}{M(\omega_1)\sqrt{1+\alpha^2}}$ $\qquad (M(\omega)=|G(j\omega)|)$ (6.6b)



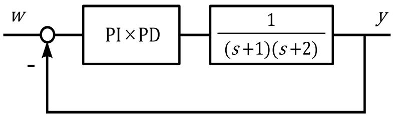
Regulator PD

- Częstotliwość $\omega_1'=\frac{8}{t_r\text{tgPM}}$
- $\measuredangle G'(j\omega_1)=\ \measuredangle G(j\omega_1)-90°+\text{arctg}\frac{\omega_1'}{z_1}$ (6.6c)
- $\Theta'=-180°+\text{PM}-\measuredangle G'(j\omega_1)$ (6.6d)
- Nastawy

  $z_2=\frac{4}{t_r}\ ,\quad p_2=\frac{z_2+\omega_1'\text{tg}\Theta'}{1-\frac{z_2}{\omega_1'}\text{tg}\Theta'}\ ,\quad k_2=\frac{1}{M'(j\omega_1')}\sqrt{\frac{\omega_1'^2+p_2^2}{\omega_1'^2+z_2^2}}$ (6.6e)

  $M'(j\omega_1')=|G'(j\omega_1')|=k_1\frac{\sqrt{\omega_1'^2+z_1^2}}{\omega_1'^2}|G(j\omega_1')|$

Przykład



Z 6.7. W układzie pokazanym na rysunku dobrać nastawy regulatora PID traktowanego jako PI×PD tak, aby uzyskać przeregulowanie 20% i czas regulacji 1 sekundę. Przyjąć $\alpha = 0.316$. (*Uwaga*. Układ jak w zadaniu Z 5.5.)

Rozwiązanie

Regulator PI

- $p_{\%} = 20 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.4559 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{PM} \cong 45°$
- $\alpha = 0.316 \quad \Rightarrow \quad \measuredangle\mathrm{PI}(\alpha) = -90° + \mathrm{arctg}\frac{1}{\alpha} = -17.5°$

$$-180° + \mathrm{PM} + |\measuredangle\mathrm{PI}(\alpha)| = -117.5°$$

- Matlab

```
l=[0 0 1]; m=[1 3 2];
w=logspace(-1,1,150); [M F]=bode(l,m,w);
[w' M F]

2.3395   0.1277   -116.3300
2.4130   0.1222   -117.8356    ≅ −117.5°
2.4887   0.1168   -119.3225
```

- $z_1 = \alpha\omega_1 = 0.316 \cdot 2.41 = 0.76$

$$k = \frac{1}{M\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{1}{0.1222\sqrt{1+0.316^2}} = 7.8, \qquad \text{PI:}\ 7.8\frac{s+0.76}{s}$$

Regulator PD

„Obiektem" dla regulatora PD jest $G'(s) = 7.8\frac{s+0.76}{s(s+1)(s+2)}$

- $\omega_1' = \frac{8}{t_r \mathrm{tgPM}} = 6.7\frac{rd}{s}$
- Matlab

```
l=7.8*conv([1 0.76],l);
m=[m 0];
```

```
[M F]=bode(l,m,w);
[w' M F]

6.4875   0.1762   -160.7853
6.6912   0.1661   -161.3386
6.9012   0.1566   -161.8777
```

$\omega_1' \cong 6.7\,\frac{rd}{s}$

- $\Theta' = -180° + \mathrm{PM} - \measuredangle G' = -180° + 45° + 161.33° \cong 26°$

- $z_2 = \frac{4}{t_r} = 4, \quad p_2 = \frac{z_2 + \omega_1' \mathrm{tg}\Theta'}{1 - \frac{z_2}{\omega_1'}\mathrm{tg}\Theta'} = \frac{4 + 6.7\mathrm{tg}26°}{1 - \frac{4}{6.7}\mathrm{tg}26°} = 10.25$

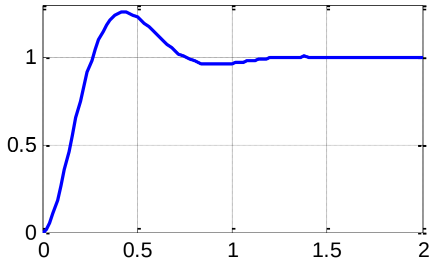
  $k_2 = \frac{1}{M'}\sqrt{\frac{\omega_1'^2 + p^2}{\omega_1'^2 + z^2}} = \frac{1}{0.1661}\sqrt{\frac{6.7^2 + 10.25^2}{6.7^2 + 4^2}} \cong 9.45$

  PD: $9.45\,\frac{s+4}{s+10.25}$

- Odpowiedź skokowa

```
l=9.45*conv([1 4],l);
m=conv([1 10.25],m);
t=0:0.02:2;
y=step(l,m+l,t);
plot(t,y);grid
max(y)
```

$1.2565 \Rightarrow 25.65\%$

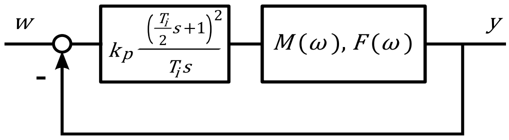


II. PID „o podwójnym zerze”

$$k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{D}s + 1}\right) \underset{D>4}{\cong} k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \underset{T_d = \frac{T_i}{4}}{=} k_p \frac{\left(\frac{T_i}{2}s + 1\right)^2}{T_i s} = k\,\frac{(s+z)^2}{s}$$

$$k = k_p \frac{T_i}{4}, \quad z = \frac{2}{T_i}$$

Tok projektowania

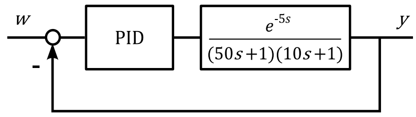


- $p_{\%} \quad \Rightarrow \quad \xi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{PM}$

- $\omega_1 = \frac{8}{t_r \text{tgPM}}$ (6.7a)
- $F(\omega_1) \quad \Rightarrow \quad \Theta = -180° + \text{PM} - F(\omega_1)$ (6.7b)
- $k_p = \frac{\cos\Theta}{M(\omega_1)}, \quad T_i = \frac{2}{\omega_1}\frac{\cos\Theta}{1-\sin\Theta}, \quad T_d = \frac{T_i}{4}$ (6.7c)

Przykład

Z 6.8. W układzie z zadania 6.4 zastąpić regulator PI regulatorem PID i dobrać jego nastawy tak, aby skrócić czas regulacji o $\frac{1}{3}$ zachowując dotychczasowe przeregulowanie (16.3%).



Rozwiązanie

- $p_{\%} = 16.3 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \text{PM} \cong 50°$
- $t_{r,PI} = 114.5$ według zadania Z 6.4. Zatem $t_{r,\text{PID}} = \frac{2}{3} t_{r,\text{PI}} = 76.3.$

  $\omega_1 = \frac{8}{t_{r,\text{PID}} \text{tgPM}} = 0.0879$
- Matlab

```
l=[0 0 1]; m=conv([50 1],[10 1]);
w=logspace(-2,0,100);
[M Fprim]=bode(l,m,w); F=Fprim-5*w'*180/pi;
[w' M F]

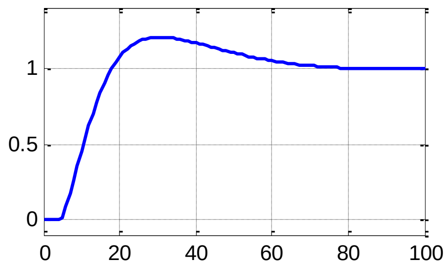
0.0850   0.1746   -141.4558
0.0890   0.1637   -144.5166
0.0933   0.1533   -147.6159
```

  $\omega_{1,PID} \cong 0.089$

- $\Theta = -180° + \text{PM} - \measuredangle F(\omega_1) = -180° + 50° + 144.5° \cong 14.5°$
- $k_p = \frac{\cos\Theta}{M(\omega_1)} = 5.91, \quad T_i = \frac{2}{\omega_1}\frac{\cos\Theta}{1-\sin\Theta} = 29, \quad T_d = \frac{T_i}{4} = 7.25$

$$\text{PID:}\ \ k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)\Bigg|_{T_d=\frac{T_i}{4}} = k_p\frac{\left(\frac{T_i}{2}s+1\right)^2}{T_i s} = 5.91\frac{(14.5s+1)^2}{29s}$$

- ```
  [lp mp]=pade(5,8); lo=conv(lp,l); mo=conv(mp,m);
  lr=5.91*conv([14.5 1],
                [14.5 1]);
  mr=[29 0];
  l=conv(lo,lr);
  m=[0 conv(mo,mr)];
  t=0:1:150;
  y=step(l,m+l,t);
  plot(t,y),grid
  max(y)
  ```
  1.2053 ⇒ 20.53%



II a. PID o czasie regulacji jak P

Regulator P

- $p_{\%} \ \Rightarrow\ \xi\ \Rightarrow\ \text{PM},\qquad \omega_1\colon\ F(\omega_1) = -180° + \text{PM}$ (6.8a)

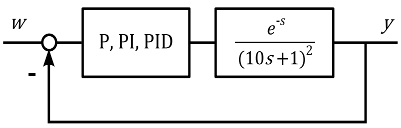
  $k_p = \frac{1}{M(\omega_1)},\quad t_{r,\text{P}} = \frac{8}{\omega_1 \text{tgPM}}$ (6.8b)

Regulator PID

- Jeżeli $t_{r,\text{PID}} = t_{r,\text{P}}$, to $\Theta = 0°$ i poprzednie wzory przyjmują postać $k_p = \frac{1}{M(\omega_1)},\quad T_i = \frac{2}{\omega_1},\quad T_d = \frac{T_i}{4}$ (6.8c)

Przykład

Z 6.9. Dla układu sterowania pokazanego na rysunku dobrać nastawy regulatorów P, PI, PID, aby


  ```

uzyskać przeregulowanie 20%. Czas regulacji regulatora PID powinien być taki sam, jak dla regulatora P. W odniesieniu do regulatora PI przyjąć $\alpha = 0.316$.

Rozwiązanie

Regulator P

- $p_{\%} = 20 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.4559 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{PM} \cong 45^\circ \quad \Rightarrow \quad F(\omega_1) = -135^\circ$
- Matlab

```
l=1;m=conv([10 1],[10 1]); w=logspace(-2,0,100);
[M Fprim]=bode(l,m,w); F=Fprim-1*w'*180/pi;
[w' M F];
```

0.1789	0.2381	-131.8308	
0.1874	**0.2217**	**-134.5612**	PM ≅ 45 °
0.1963	0.2060	-137.2576	

- $k_p = \frac{1}{M(\omega_1)} = \frac{1}{0.2217} = 4.6, \quad t_{r,\mathrm{P}} = \frac{8}{\omega_1 \mathrm{tgPM}} = \frac{8}{0.1874 \cdot 1} = 42.68\ s$

Regulator PI

- $\alpha = 0.2 \quad \Rightarrow \quad \measuredangle\mathrm{PI}(\alpha) = -90^\circ + \mathrm{arctg}\frac{1}{\alpha} = -17.5^\circ$

  $-180^\circ + \mathrm{PM} + |\measuredangle\mathrm{PI}(\alpha)| = -117.5^\circ$

- `[w' M F]`

0.1353	0.3533	-114.8182	
0.1417	**0.3323**	**-117.7171**	≅ −117.5 °
0.1485	0.3120	-120.5944	

- $z = \alpha\omega_{1,\mathrm{PI}} = 0.316 \cdot 0.1417 = 0.0448,$

  $k_p = \frac{1}{M(\omega_1)\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{1}{0.3323\sqrt{1+0.2^2}} = 2.86$

  PI: $2.86\frac{s+0.045}{s}, \quad t_{r,\mathrm{PI}} = \frac{8}{\omega_1 \mathrm{tgPM}} = \frac{8}{0.1417 \cdot 1} = 56.4s$

Regulator PID

- $t_{r,\mathrm{PID}} = t_{r,\mathrm{P}}$

$$k_p = \frac{1}{M(\omega_1)} = 4.68, \quad T_i = \frac{2}{\omega_1} = \frac{2}{0.1874} = 10.7, \quad T_d = \frac{T_i}{4} = 2.6$$

$$\text{PID:} \;\; k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)\bigg|_{T_d=\frac{T_i}{4}} = k_p \frac{\left(\frac{T_i}{2}s+1\right)^2}{T_i s} =$$

$$= \; 4.68 \frac{(5.2s+1)^2}{10.4s}\bigg|_{D=10} = 4.68 \frac{(5.2s+1)^2}{10.4s(0.26s+1)}$$

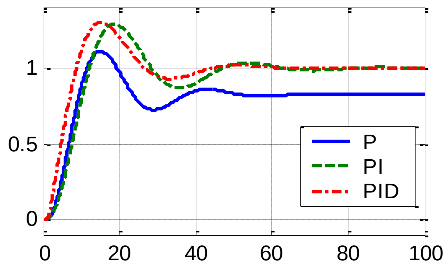
- Odpowiedzi

```
lo=[0 0 1]; mo=m; [lp, mp]=pade(1,8);
lo=conv(lo,lp);
mo=conv(mo,mp);

%Reg. P
l=4.68*lo;
m=mo;
t=0:0.1:100;
y1=step(l,m+l,t);

%Reg. PI
l=3.37*conv([1 0.05],lo);
m=conv([1 0],mo);
y2=step(l,m+l,t);

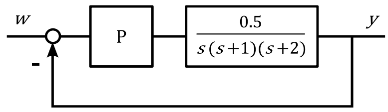
%Reg. PID
l=4.68*conv(conv([5.2 1],[5.2 1]),lo);
m=10.4*conv([0.26 1 0],mo);
y3=step(l,m+l,t);
```



`max(y1)` 1.1107 ⇒ 11.07%
`max(y2)` 1.2893 ⇒ 28.93%
`max(y3)` 1.2973 ⇒ 29.73%

```
plot(t,y1,'-',t,y2,'--',t,y3,'-.');grid
legend('P','PI','PID');
```

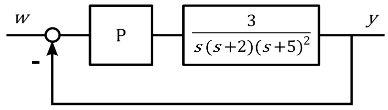
Zadania domowe



D 6.1. Dobrać regulator P dla układu sterowania pokazanego na rysunku, aby uzyskać przeregulowanie 16.3%. Kolejno należy wyznaczyć: ω_1, $M(\omega_1)$, k_p, t_r, ω_2, GM, $\max(y)$.

Odp.: $\omega_1 = 0.48$, $M(\omega_1) = 0.449$, $k_p = 2.05$, $t_r \cong 13.8$

$\omega_2 = 1.41$, GM = 5.8 $\Rightarrow$ $15.26\,dB$, $\max(y) = 1.15$



D 6.2. Dobrać regulator P, aby uzyskać zapas modułu $\mathrm{GM}_{dB} = 12$. Wyznaczyć kolejno: ω_2, $M(\omega_2)$, k_p, ω_1, PM, t_r, $\max(y)$.

Odp.: $\omega_2 = 2.05$, $M(\omega_2) = 0.017$, $k_p = 14.3$, $\omega_1 = 0.774$

PM = 51.2°, $t_r = 8.29$, $\max(y) = 1.17$

D 6.3. Jakie wzmocnienia będą miały regulatory P nastawione metodą Zieglera-Nicholsa w układach pokazanych niżej? Należy wyznaczyć: ω_{kr}, $k_{p,kr}$, k_p, ω_1, PM, t_r, $\max(\frac{y}{y(N)})$.

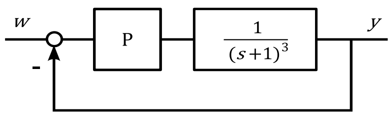
a) *Odp.*:

$\omega_{kr} = 1.7$, $k_{p,kr} = 7.74$

$k_p = 3.87$, $\omega_1 = 1.176$

PM = 31.1°, $t_r = 11.3$

$\max\left(\frac{y}{y(N)}\right) = 1.52$



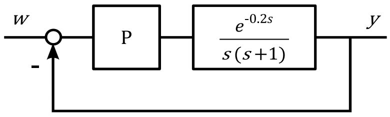
b) *Odp.*:

$\omega_{kr} = 2.15, \quad k_{p,kr} = 5.11$

$k_p = 2.55, \quad \omega_1 = 1.41$

$\mathrm{PM} = 19°, \quad t_r = 16.4$

$\max(y) = 1.60$



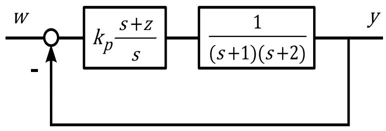
D 6.4. Dobrać nastawy regulatorów PI w układach sterowania pokazanych na poniższych rysunkach przyjmując podane wartości współczynnika α i wyznaczając kolejno: $\omega_1,\ z,\ M,\ k_p,\ t_r,\ \max(y)$.

a) $\alpha = 0.2$

Odp.: $\omega_1 = 2.43, \quad z = 0.487$

$M = 0.12, \quad k_p = 7.98$

$t_r = 2.75, \quad \max(y) = 1.13$

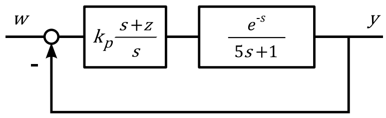


b) $\alpha = 0.316$

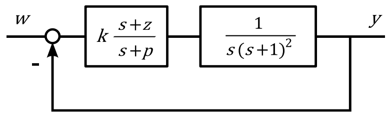
Odp.: $\omega_1 = 0.739, \quad z = 0.233$

$M = 0.261, \quad k_p = 3.65$

$t_r = 10.8, \quad \max(y) = 1.27$



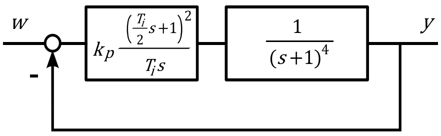
D 6.5. Dobrać nastawy regulatora PD dla sterowania obiektem $G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$, aby uzyskać przeregulowanie 20% i czas regulacji 8 sekund. Wyznaczyć kolejno: $\omega_1,\ z,\ p,\ k,\ \theta$, $\max(y)$.



Odp.: $\omega_1 = 1.02, \quad z = 0.5, \quad p = 3.24, \quad k = 6.35, \quad \theta = 46.3°$

$\max(y) = 1.22$

D 6.6. Dobrać regulator PID „o podwójnym zerze” dla sterowania obiektem $G(s) = \frac{1}{(s+1)^4}$, aby uzy-



skać przeregulowanie 20%. Czas regulacji ma być taki sam, jak przy sterowaniu przez regulator P, tzn. $t_{r,\mathrm{PID}} = t_{r,\mathrm{P}}$. Należy wyznaczyć: ω_1, $t_{r,\mathrm{P}}$, k_p, T_i, T_d, $\max(y)$.

Odp.: $\omega_1 = 0.673$, $t_{r,\mathrm{P}} = 11.8$, $k_p = 2.11$, $T_i = 2.96$,
$T_d = 0.74$, $\max(y) = 1.24$