Transformata Laplace'a - przypomnienie, transmitancja operatorowa, schematy blokowe, wprowadzenie do pakietu Matlab/Scilab i Simulink, regulatory PID - transmitancja, przykłady modeli matematycznych wybranych obiektów regulacji.

1. Transformata Laplace'a – przypomnienie

Transformata jednostronna

$$\boldsymbol{F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

f(*t*) – oryginał spełniający odpowiednie warunki (w naszych rozważaniach spełnione)
F(*s*) – transformata, *s* – zmienna zespolona $s = \sigma + j\omega$

Tablica podstawowych własności

$af(t) + bg(t), \quad a, b = const$	$aF(s) + bG(s)$
$f(at), \quad a = const$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-\tau)$	$e^{-\tau s}F(s)$
$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$

Uproszczona tablica podstawowych transformat

$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$a \cdot 1(t), \qquad a = const$	$a \cdot \frac{1}{s}$
$t^n, \quad n - naturalna$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2!}t^2$	$\frac{1}{s^3}$
$\frac{1}{6}t^3 = \frac{1}{3!}t^3$	$\frac{1}{s^4}$
$e^{-at}, \quad a = const > 0$	$\frac{1}{s+a}$
$te^{-at}, \quad a = const > 0$	$\frac{1}{(s+a)^2}$

$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{\sigma t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$
$e^{\sigma t}\cos\omega t$	$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$
$1-e^{\sigma t}\left(\cos\omega t-\frac{\sigma}{\omega}\sin\omega t\right)$	$\frac{\sigma^2+\omega^2}{s[(s-\sigma)^2+\omega^2]}$

$\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}$	$\frac{1}{Ts+1}$
$1-e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(Ts+1)}$
$t-\frac{1}{T}\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$	$\frac{1}{s^2(Ts+1)}$
$1-\left(1+\frac{t}{T}\right)e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(Ts+1)^2}$

$\frac{d^n}{dt^n}f(t), \quad n - naturalne$	$s^nF(s)$
$\frac{d}{dt}f(t)$, *zerowe warunki początkowe**	$sF(s)$
$\frac{d^2}{dt^2}f(t)$, *zerowe warunki początkowe**	$s^2F(s)$
$\int f(t)dt$	$\frac{1}{s}F(s)$
$\iint f(t)dt$	$\frac{1}{s^2}F(s)$
$\iiint f(t)dt$	$\frac{1}{s^3}F(s)$

* $\frac{d^n}{dt^n}f(t)\to s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}f^{k-1}(0)$, * $\frac{d}{dt}f(t)\to sF(s)-f(0)$, * $\frac{d^2}{dt^2}f(t)\to s^2F(s)-sf(0)-\frac{d}{dt}f(0)$

Przykład 1

$$a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)=u(t), \qquad y(0)=0, \qquad a,b-\ const$$

$a\frac{dy(t)}{dt} + by(t) = u(t)$ - obustronnie stosujemy przekształcenie Laplace'a

$$y(t) \,\widehat{=}\, Y(s),\;\; u(t) \,\widehat{=}\, u(s)$$

$$asY(s) + bY(s) = U(s)$$

$$(as + b)Y(s) = U(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{as+b}U(s)$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{a}{b}s+1}U(s) \qquad \text{dla } T = \frac{a}{b},\; k = \frac{1}{b}$$

$$Y(s) = \frac{k}{Ts+1}U(s)$$

dla $u(t) = 1(t) \;\; \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{k}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s} = \frac{k}{s(Ts+1)}$$

na podstawie tabeli

$$y(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Metoda rozkładu na ułamki proste

Pierwiastki jednokrotne rzeczywiste

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots} = \frac{R_1}{s-p_1} + \frac{R_2}{s-p_2} + \cdots$$

$R_i = (s - p_i)\cdot F(s)|_{s=p_i}$ - metoda przesłaniania

$$f(t) = R_1 e^{p_1 t} + R_2 e^{p_2 t} + \cdots$$

Pierwiastki zespolone

$$F(s) = \frac{b(s)}{(s-p_1)(s-p)(s-p^*)\cdots} = \frac{R_1}{s-p_1} + \frac{R}{s-p} + \frac{R^*}{s-p^*}$$

p_1 - rzeczywisty

$p = \sigma + j\omega, \quad R = A + jB$

$p^* = \sigma - j\omega, \;\; R^* = A - jB$

$$F(s) = \cdots + \frac{A+jB}{s-(\sigma+j\omega)} + \frac{A-jB}{s-(\sigma-j\omega)} = \cdots + \frac{A+jB}{(s-\sigma)-j\omega} + \frac{A-jB}{(s-\sigma)+j\omega} = \cdots + \frac{2A(s-\sigma)-2B\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} = \cdots + \frac{2A(s-\sigma)+(-2B)\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} = \cdots + \frac{C(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \frac{S\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$$

$C = 2A,\; S = -2B$

$$f(t) = R_1 e^{p_1 t} + e^{\sigma t}(C\cos\omega t + S\sin\omega t) = R_1 e^{p_1 t} + e^{\sigma t}\sqrt{S^2 + C^2}\left(\frac{C}{\sqrt{S^2+C^2}}\cos\omega t + \frac{S}{\sqrt{S^2+C^2}}\sin\omega t\right)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$C\cos\omega t + S\sin\omega t = \sqrt{S^2 + C^2}\sin(\omega t + \phi), \qquad \phi = \mathrm{arctg}\frac{C}{S}$$

$$f(t) = R_1 e^{p_1 t} + \sqrt{S^2 + C^2}\, e^{\sigma t}\sin(\omega t + \phi), \qquad \phi = arctg\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = arctg\frac{C}{S}$$

$$F(s) = \dots + \frac{C(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \frac{S\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} = \dots + \frac{C(s-\sigma)+S\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$$ - metoda przesłaniania

$$C(s-\sigma) + S\omega|_{s=\sigma+j\omega} = \omega(S + jC) = [(s-\sigma)^2 + \omega^2]F(s)|_{s=\sigma+j\omega}$$

$$S + jC = \frac{1}{\omega}[(s-\sigma)^2 + \omega^2]F(s)|_{s=\sigma+j\omega}$$

Wskazówka

- dla biegunów rzeczywistych odpowiedź to suma funkcji wykładniczych ewentualnie mnożonych przez t^n dla biegunów n-krotnych
- dla biegunów zespolonych jednokrotnych odpowiedź to suma funkcji *sin* i *cos* z amplitudą modyfikowaną wykładniczo

Nieformalna wskazówka: $p = \sigma + j\omega \;\rightarrow\; e^{\sigma t}\cos(\omega t)$

2. Transmitancja operatorowa

➢ **Transmitancja operatorowa** – stosunek transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego przy zerowych warunkach początkowych

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow Y(s) = G(s)\cdot U(s)$$

$$\boxed{\text{DC gain} = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)U(s)\Big|_{U(s)=\frac{1}{s}} = G(s)\Big|_{s=0}}$$

➢ **Transmitancja widmowa** – stosunek sygnału wyjściowego do wejściowego dla sinusoidalnego sygnału wejściowego

$$G(j\omega) = G(s)\Big|_{s=j\omega}$$

Uwaga

Pierwiastki licznika transmitancji nazywamy *zerami* zaś pierwiastki mianownika transmitancji nazywamy *biegunami*.

Uwaga

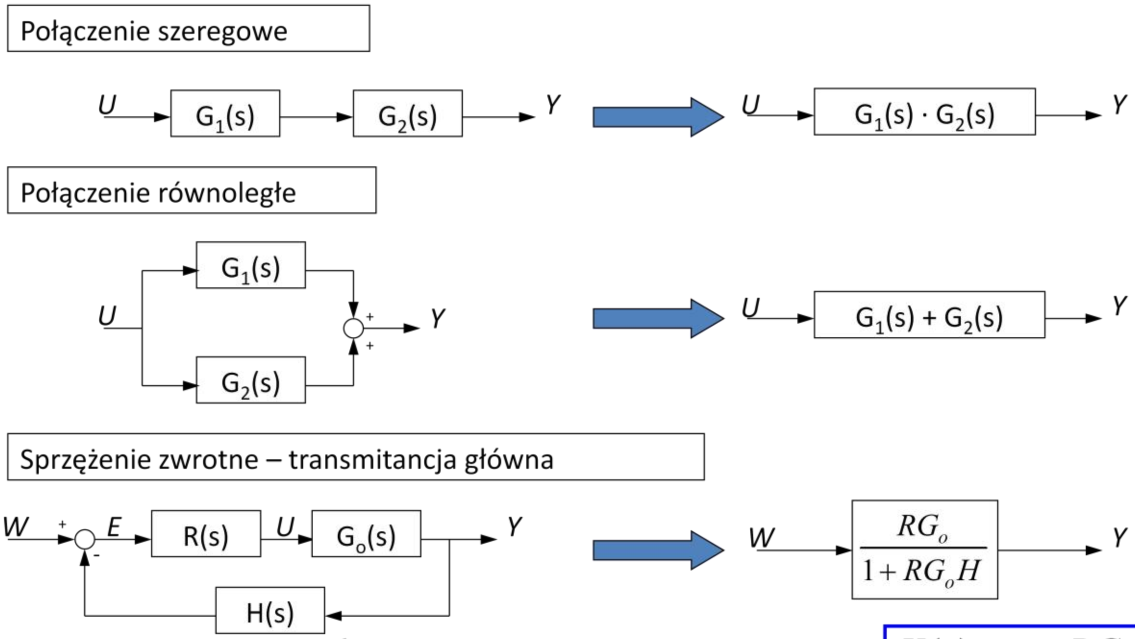
Parametry transmitancji zależą tylko od właściwości obiektu a nie od charakteru sygnału wejściowego.

Przykład 1 – cd.

$$Y(s) = \frac{k}{Ts+1}U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{Ts+1}$$

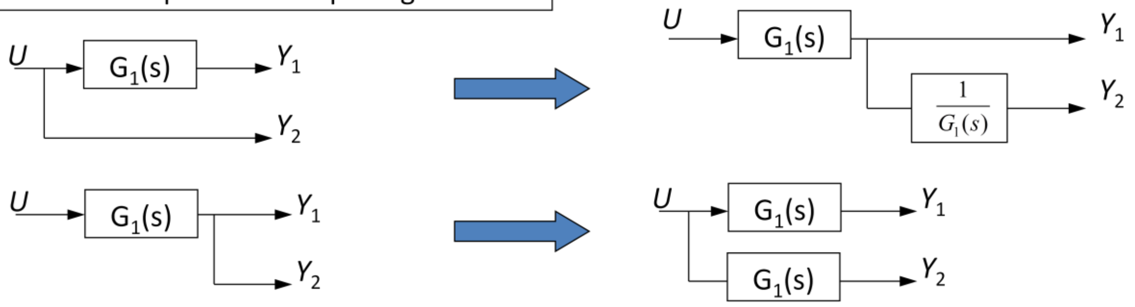
Pytanie: jaka będzie odpowiedź układu na wymuszenie skokowe o amplitudzie równej 2. Wyznacz wartość ustaloną odpowiedzi.

3. Schematy blokowe

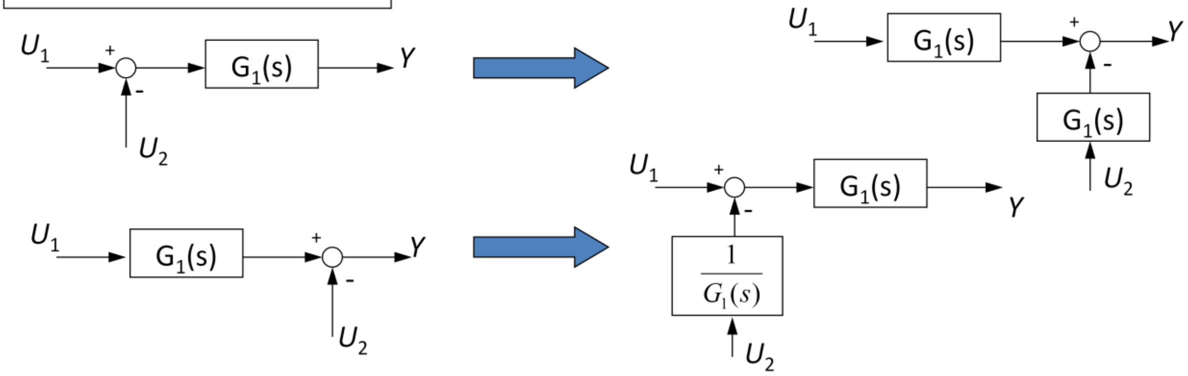


$$\frac{Y(s)}{W(s)} = ? \qquad \begin{cases} Y = RG_oE = RG_oW - RG_oHY \\ E = W - HY \end{cases} \qquad \boxed{\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{RG_o}{1+RG_oH}}$$

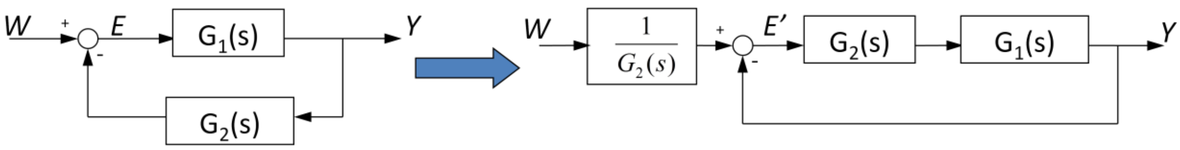
Przesuwanie punktu zaczepowego



Przesuwanie sumatora



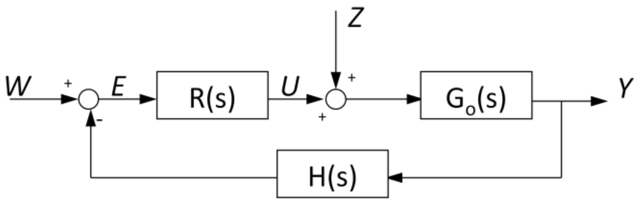
Przekształcenie do jednostkowej pętli sprzężenia zwrotnego



$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_1}{1+G_1G_2}$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{1}{G_2} \cdot \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2} = \frac{G_1}{1+G_1G_2}$$

Transmitancja zakłóceniowa – zakłócenie wejścia obiektu



$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = ?$$

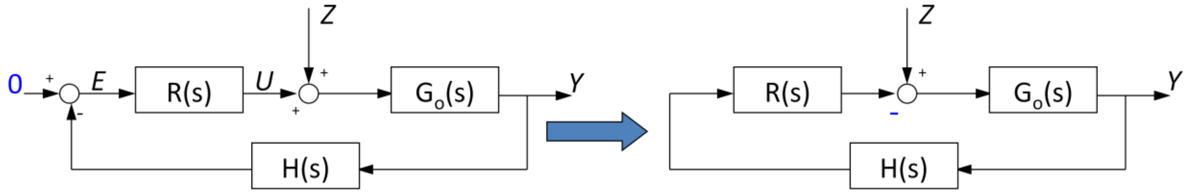
Zasada superpozycji

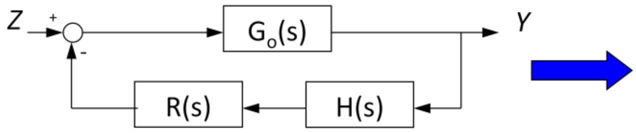
$Y=Y_w+Y_z$

Transmitancja zakłóceniowa – zakłócenie wejścia obiektu

Oddziaływanie sygnałów *W* i *Z* można rozpatrywać niezależnie ze względu na zasadę superpozycji

W=0





$$\boxed{\frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)R(s)H(s)}}$$

4. Wprowadzenie do pakietu Matlab/Scilab

Podstawowe instrukcje - Matlab

1. Definiowanie wektora czasu

   t=0:0.1:5;

2. Definiowanie transmitancji $G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$

   L=[a_n $a_{n\text{-}1}$ a_1 a_0]
   M=[b_n $b_{n\text{-}1}$ b_1 b_0]

3. Odpowiedź transmitancji na sygnał wejściowy w postaci skoku jednostkowego

   y=step(L,M,t);

4. Wykres

   plot(t,y); grid

Analogiczne zadania można wykonać w nieodpłatnie dostępnym pakiecie *Scilab* (www.scilab.org).

1. Definiowanie wektora czasu

   t=[0:0.1:5]; *bądź* t=0:0.1:5;

2. Definiowanie transmitancji $G(s)=\frac{L(s)}{M(s)}=\frac{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1 s+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\dots+b_1 s+b_0}$

   s=poly(0,'s'); *bądź* s=%s
   sys=syslin('c',($a_n * s^n + a_{n-1} * s^{n-1} + \dots + a_1 * s + a_0$)/($b_n * s^n + b_{n-1*} s^{n-1} + \dots + b_1 * s + b_0$));

3. Odpowiedź transmitancji na sygnał wejściowy w postaci skoku jednostkowego

   y=csim('step',t,sys);

4. Wykres

   plot2d(t,y); xgrid *bądź* plot(t,y); xgrid

Przykłady

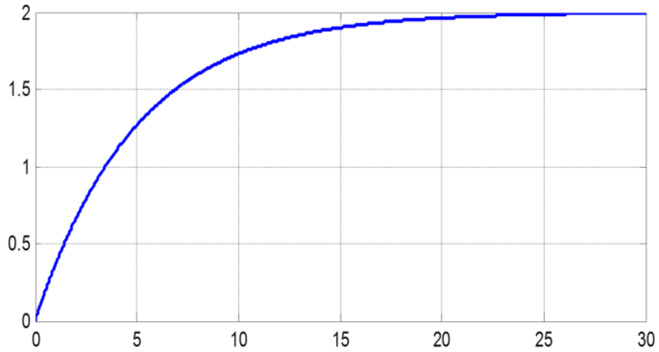
$$\boxed{G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k}{Ts+1}}$$

Matlab

```
k=2;T=5;
t=0:0.01:6*T;
y=step(k,[T 1],t);
plot(t,y);grid
```

Scilab

```
k=2;T=5;
s=poly(0,'s');
sys=syslin('c',k/(T*s+1));
t=0:0.01:6*T;
y=csim('step',t,sys);
plot2d(t,y);xgrid
```



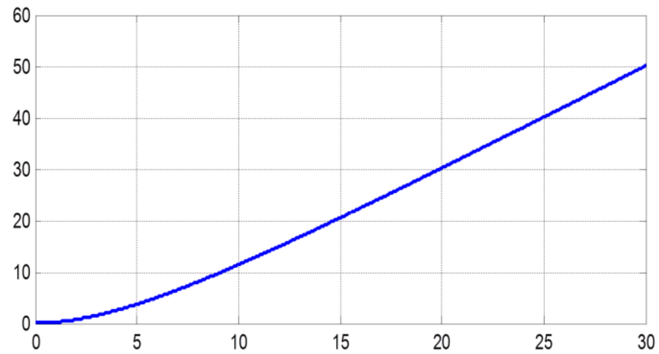
$$\boxed{G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k}{s(Ts+1)}}$$

Matlab

```
k=2;T=5;
t=0:0.01:6*T;
y=step(k,[T 1 0],t);
plot(t,y);grid
```

Scilab

```
k=2;T=5;
s=poly(0,'s');
sys=syslin('c',k/(s*(T*s+1)));
t=0:0.01:6*T;
y=csim('step',t,sys);
plot2d(t,y);xgrid
```



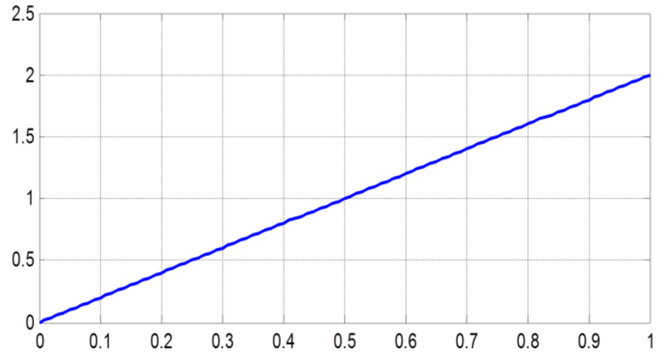
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s}$$

Matlab

```
k=2;
t=0:0.01:1;
y=step(k,[1 0],t);
plot(t,y);grid
```

Scilab

```
k=2;
s=poly(0,'s');
sys=syslin('c',k/s);
t=0:0.01:1;
y=csim('step',t,sys);
plot2d(t,y);xgrid
```



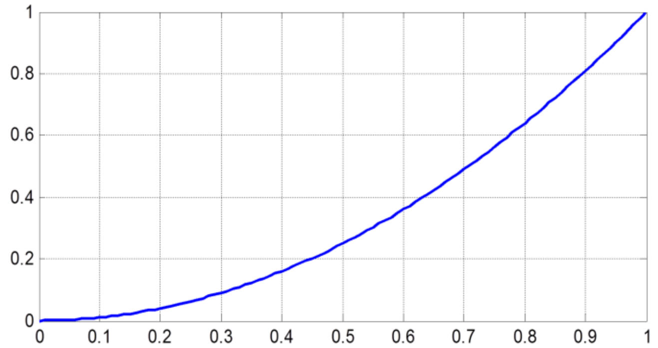
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s^2}$$

Matlab

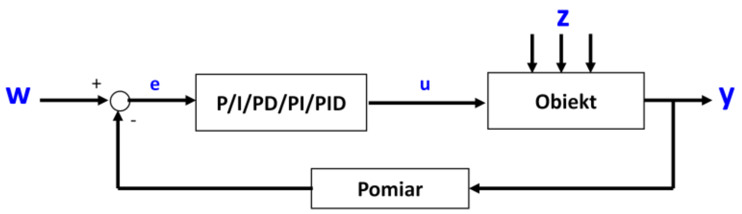
```
k=2;
t=0:0.01:1;
y=step(k,[1 0 0],t);
plot(t,y);grid
```

Scilab

```
k=2;
s=poly(0,'s');
sys=syslin('c',k/s^2);
t=0:0.01:1;
y=csim('step',t,sys);
plot2d(t,y);xgrid
```



5. Regulatory PID – transmitancje



PID – opis w dziedzinie czasu

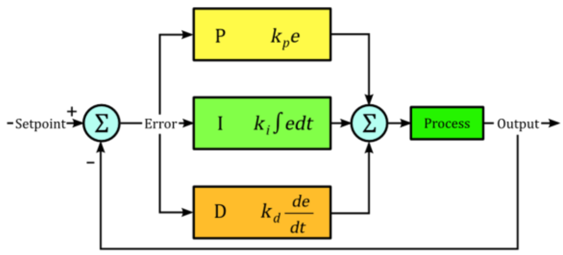
$$P = k_p e$$

$$I = k_i \int e dt$$

$$PD = k_p e + k_d \frac{de}{dt}$$

$$PI = k_p e + k_i \int e dt$$

$$PID = k_p e + k_i \int e dt + k_d \frac{de}{dt}$$



k_p – wzmocnienie członu proporcjonalnego

k_i – wzmocnienie członu całkującego

k_d – wzmocnienie członu różniczkującego

PID - transmitancja

$$P = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p$$

$$I = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{k_i}{s}$$

$$PD = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + k_d s$$

$$PI = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s}$$

$$PID = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

PID – opis w dziedzinie czasu

$$\boxed{PID = k_p\left(e + \frac{1}{T_i}\int e dt + T_d\frac{de}{dt}\right)}$$

PID - transmitancja

$$\boxed{PID = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)}$$

PID – z „rzeczywisty" różniczkowaniem

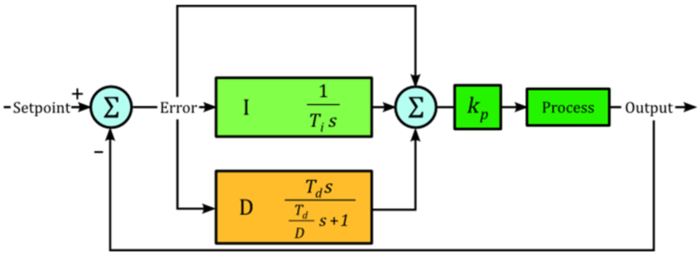
$$\boxed{PID = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{D}s + 1}\right)}$$

k_p – wzmocnienie regulatora

T_i – stała całkowania

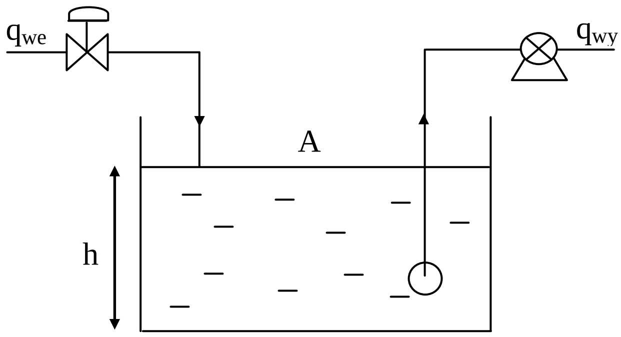
T_d – stała różniczkowania

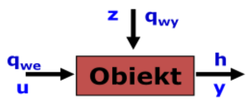
D – współczynnik



6. Modele matematyczne wybranych obiektów regulacji

Zbiornik z pompą opróżniającą (bilans masy)

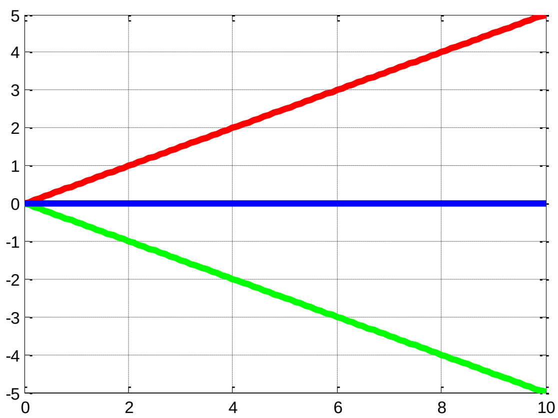




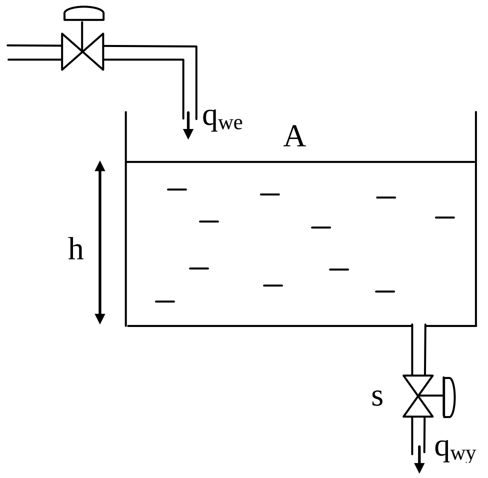
$$H(s) = \frac{Q_{we}(s) - Q_{wy}(s)}{As}$$

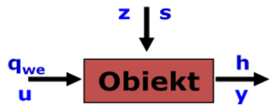
Matlab

```
L = 1
M = [2 0]
t = 0:0.1:10;
y = step (L,M,t);
L1 = -1
y1 = step(L1,M,t);
plot (t, y,'r-',t,y1,'g-',t,y+y1,'b-'), grid
```



Zbiornik z wypływem pod ciśnieniem hydrostatycznym (bilans masy)

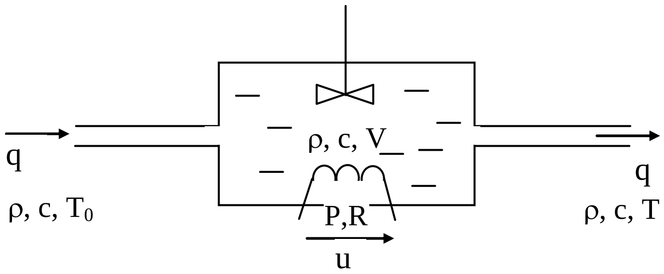




Po linearyzacji (rozwinięcie w szereg Taylora)

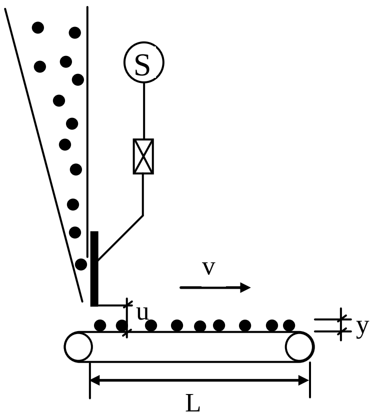
$$\Delta H(s) = \frac{1}{(Ts+1)}\left(k_1\,\Delta Q_{we}(s) - k_2\,\Delta S(s)\right)$$

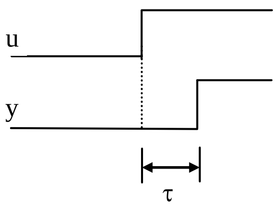
Podgrzewacz elektryczny (bilans energii)



$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta U(s)} = \frac{k}{Ts+1}$$

Opóźnienie transportowe w kotle rusztowym

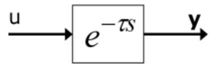




$$\tau = \frac{L}{v}$$

$$y(t) = u(t-\tau)$$

$$Y(s) = U(s)\cdot e^{-\tau s}$$



Uwaga
Transmitancje obiektów technologicznych (energetycznych, chemicznych i in.) należy zwykle uzupełnić o pewne opóźnienie, co daje:

$$\frac{1}{Ts}e^{-\tau s},\quad \frac{1}{Ts+1}e^{-\tau s},\quad \frac{1}{(Ts+1)^2}e^{-\tau s}.$$

Bardzo często wartość τ określa się eksperymentalnie.

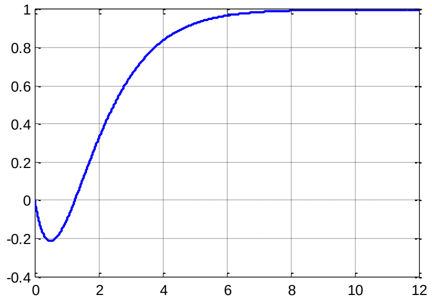
Przybliżenie Padé

$$e^{-\tau s} \cong \frac{2 - \tau s + \frac{1}{2!}(-\tau s)^2 + \frac{1}{3!}(-\tau s)^3 + \ldots}{2 + \tau s + \frac{1}{2!}(\tau s)^2 + \frac{1}{3!}(\tau s)^3 + \ldots}$$

Przykład – Matlab – instrukcja pade – przybliżenie 1-go rzędu

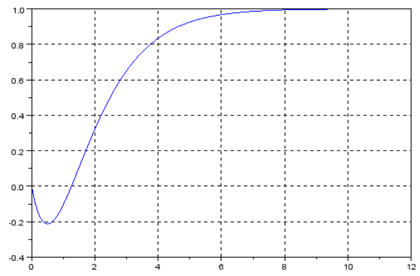
```
L=1;
M=[1 1];
[Lp   Mp]=pade(2,1);
Lz=conv(L,Lp);
Mz=conv(M,Mp);
t=0:0.01:12;
y=step(Lz,Mz,t);
plot(t,y);grid
```

$$G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-2s}$$



Przykład – Scilab – aproksymacja opóźnienia - przybliżenie 1-go rzędu

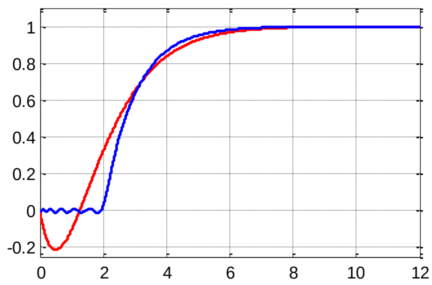
```
s=%s;
sys1= syslin('c',1/(s+1));
delay=syslin('c',(2-2*s)/(2+2*s));
sys=sys1*delay;
t=0:0.01:12;
y=csim('step',t,sys);
plot(t,y);xgrid
```



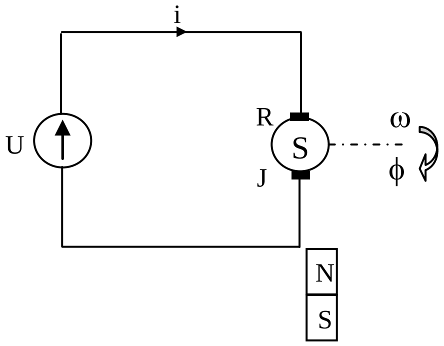
Przykład – Matlab – instrukcja pade – przybliżenie 1-go i 12-go rzędu

```
L=1;
M=[1 1];
[Lp1   Mp1]=pade(2,1);
[Lp12   Mp12]=pade(2,12);
Lz1=conv(L,Lp1);
Mz1=conv(M,Mp1);
Lz12=conv(L,Lp12);
Mz12=conv(M,Mp12);
t=0:0.01:12;
y1=step(Lz1,Mz1,t);
y12=step(Lz12,Mz12,t);
plot(t,y1,'r-',t,y12,'b-');grid
```

$$G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-2s}$$



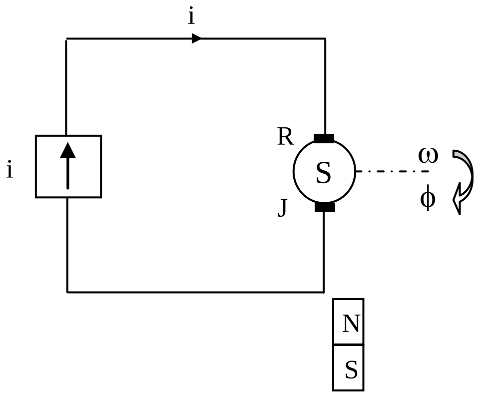
Silnik prądu stałego z magnesami trwałymi – sterowanie napięciowe



$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{k}{Ts+1}$$

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{k}{s(Ts+1)}$$

Silnik prądu stałego z magnesami trwałymi – sterowanie prądowe



$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{k}{s}$$

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{k}{s^2}$$